

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۹۰

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی / گد درس: علوم کامپیوتر (۱۱۱۱۰۵)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

گد سری سؤال: یک (۱)

تنها با یاد اوست که دلها آرام میگیرد.

۱. چه تعدادی از مقدارهای ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1+i & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ در بازه $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ قرار میگیرد؟

- الف. ۱ ب. ۳ ج. صفر د. ۲

۲. هرگاه A ماتریس پاد متقارن باشد کدام گزینه صحیح نمی باشد؟

- الف. $\forall x: x^T Ax = 0$ ب. $a_{ij} = -a_{ji}$ ج. A یک ماتریس معین مثبت است. د. $a_{ij} = 0$

۳. اگر A یک ماتریس نامنفرد $n \times n$ باشد کدام گزینه صحیح نمی باشد؟

- الف. صفر یک مقدار ویژه A است. ب. بعنوان یک نگاشت از R^n به R^n , A پوشا است.
ج. سطرهای A یک پایه برای R^n تشکیل می دهند. د. A را می توان بصورت حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی نوشت.

۴. در حل دستگاه $AX = b$ (E_i سطر i ام ماتریس افزوده است.) کدام گزینه نمی تواند صحیح باشد؟

- الف. عمل $E_i \rightarrow E_i + \lambda E_i$ ($\lambda \neq 0$) جواب را تغییر نمی دهد.
ب. عمل $E_i \rightarrow E_i + \lambda E_j$ جواب را تغییر نمی دهد.
ج. عمل $E_i \leftrightarrow E_j$ جواب را تغییر نمی دهد.
د. عمل $E_i \rightarrow E_j$ ($\lambda \neq 0$) جواب را تغییر نمی دهد.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۹۰

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی / گد درس: علوم کامپیوتر (۱۱۱۱۱۰۵)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

گد سری سؤال: یک (۱)

۵. کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟

الف. هر ماتریس اکیداً غالب قطری منفرد است و یک تجزیه LU دارد.

ب. اگر A یک ماتریس حقیقی، متقارن باشد، آنگاه یک تجزیه منحصر به فرد LU دارد.

ج. هر ماتریس مربعی حداکثر یک معکوس راست دارد.

د. در روش حذف گاوس با محورگیری، اکیداً غالب قطری بودن یک ماتریس را حفظ می کند.

۶. اگر ماتریس A بصورت زیر تعریف شده باشد، کدام گزینه صحیح می باشد؟

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

الف. ماتریس A نامنفرد است. ب. یک تجزیه LU منحصر به فرد برای ماتریس A وجود دارد.

ج. ماتریس A اکیداً غالب قطری است. د. هر سه گزینه

۷. اگر $x = (4, 4, -4, 4)^T$ آنگاه مقدار عبارت $\frac{\|x\|_2 \cdot \|x\|_\infty}{\|x\|_1}$ برابر است با:

الف. ۴ ب. ۲ ج. ۸ د. ۶

۸. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، $\frac{\|A\|_2}{\|A\|_\infty}$ کدام است؟

الف. $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ب. $6\sqrt{2}$ ج. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ د. $\sqrt{2}$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۹۰

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی / گد درس: علوم کامپیوتر (۱۱۱۱۱۰۵)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

گد سری سؤال: یک (۱)

۹. کدامیک از گزینه های زیر یک ویژگی از یک نرم ماتریس طبیعی برای یک نرم برداری می باشد؟

الف. $\|A + B\| \geq \|A\| + \|B\|$ ب. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

ج. $\|AB\| \geq \|A\| \|B\|$ د. $\|A - B\| \geq \|A\| + \|B\|$

۱۰. در رابطه با عدد شرطی A کدام رابطه همواره برقرار است؟

الف. $k(A) \geq 1$ ب. $k(A) \leq 1$ ج. $k(A) \geq \text{rank}(A)$ د. $k(A) \leq \|A\|$

۱۱. اگر $A = D - C_L - C_U$ افزاز شود که در آن $D = \text{diag}(A)$ ، C_L منفی قسمت پایین مثلثی اکید A و C_U منفی

قسمت بالا مثلثی اکید A باشند، در فرم ماتریسی روش گوس سایدل $(X^{(k)} = BX^{k-1} + C)$ ماتریس B کدام است؟

الف. $(C_L - C_U)^{-1} D$ ب. $(D - C_L)^{-1} C_U$

ج. $D^{-1}(C_L + C_U)$ د. $D(C_L^{-1} + C_U)$

۱۲. اگر مقادیر ویژه ماتریس A، $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{-1}{3}$ ، $\frac{-1}{2}$ باشند آنگاه $\rho(A)$ برابر است با:

الف. $\frac{1}{3}$ ب. $\frac{1}{2}$ ج. ۱ د. ۴

۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد و $f(x) = x^2 + 5x$ باشد. شعاع طیفی $f(A)$ کدام است؟

الف. ۱ ب. ۵ ج. ۲ د. ۱۴

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۹۰

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی / گد درس: علوم کامپیوتر (۱۱۱۱۱۰۵)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

گد سری سؤال: یک (۱)

۱۴. دنباله حاصل از روش تکراری $X^{(k)} = GX^{(k-1)} + C$ با شروع از هر X^0 همگرا است اگر

الف. $(I - B)$ منفرد باشد.

ب. شعاع طیفی ماتریس G کوچکتر از ۱ باشد.

ج. شعاع طیفی ماتریس G بزرگتر از یک باشد و به $(I - G)^{-1}C$ همگرا می‌باشد.

د. به ازای نرم‌های ماتریس داشته باشیم $\|B\| > 1$

۱۵. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟

الف. ماتریس‌های مشابه مقادیر ویژه یکسان دارند.

ب. هر ماتریس مربعی بطور یکانی مشابه یک ماتریس مثلثی است.

ج. اگر $\lambda \neq 0$ یک مقدار ویژه A و A وارون‌پذیر باشد آنگاه λ^{-1} یک مقدار ویژه A^{-1} است.

د. هر سه گزینه صحیح می‌باشند.

۱۶. فرض کنید $\|x\|_p = 1$ اگر $U = I - \alpha xx^T$ باشد U^p کدام است؟

الف. U ب. I ج. $I - U$ د. U^2

۱۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $tr(A^3)$ کدام است؟

الف. ۳۶ ب. ۶ ج. ۲۷ د. ۸

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۹۰

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی / گد درس: علوم کامپیوتر (۱۱۱۱۱۰۵)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

گد سری سؤال: یک (۱)

۱۸. شبه معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۱۹. اگر دستگاه $Ax = b$ بصورت زیر $\begin{cases} 0x - 1/6y + 0/6z = 5 \\ 0x + 1/2y + 0/8z = 7 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = -2 \end{cases}$ و $A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0/4 & 0/3 & 0 & 0 \\ 0/6 & 0/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد. جواب

مینیمال این دستگاه کدام است؟

الف. $[0/1, 8/6, 0]^T$ ب. $[0/0, 0/1, 8/6]^T$ ج. این دستگاه جواب مینیمال ندارد. د. $[0/0, 0/2, 8/6]^T$

۲۰. کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف. $(AB)^+ = B^+A^+$ ب. $A^{++} \neq A$

ج. $(A^+)^* \neq (A^*)^+$ د. اگر A هرمیتی باشد آنگاه A^+ نیز هرمیتی خواهد بود.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۹۰

نام درس: جبر خطی عددی
رشته تحصیلی / گد درس: علوم کامپیوتر (۱۱۱۱۱۰۵)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

گد سری سؤال: یک (۱)

سوالات تشریحی

* بارم هر سؤال (۲ نمره) می باشد.

۱. آیا می توان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ را به شکل $A = LL^T$ تجزیه نمود؟ در صورت امکان این تجزیه را بدست آورید.

۲. نشان دهید اگر $\|\cdot\|$ نرمی در R^n باشد آنگاه رابطه $\|A\| = \sup\{\|Au\| : u \in R^n, \|u\| = 1\}$ یک نرم بر روی فضای خطی همه ماتریس های $n \times n$ تعریف می کند.

۳. نشان دهید قسمت موهومی مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ در بازه $[-1, 1]$ قرار می گیرند.

۴. الف) فرض کنید $A = LU$ که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی واحد و U یک ماتریس بالا مثلثی است. قرار دهید $B = UL$ و نشان دهید A, B مقادیر ویژه یکسان دارند.

ب) ثابت کنید ماتریس $A = I - VV^*$ یکانی است اگر و تنها اگر $\|V\|_p^2 = 2$ یا $V = 0$

۵. یک تجزیه مقدار تکین برای ماتریس زیر بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/6 & 0/6 \\ 0 & 1/2 & 0/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$