نام درس: آنالیز عددی ۲ — **تعداد سؤالات: تستی:** ۲۰ **تشریحی:** ۶

رشته تحصیلی/ کُد درس: علوم کامپیوتر (۱۱۱۹۰۰۴)- ریاضی- جبرانی ارشد (۱۱۱۱۰۷۵) — **زمان آزمون (دقیقه): تستی:** ۶۰ **تشریحی:** ۶۰

کُد سری سؤال: یک (۱) — **استفاده از:** ماشین حساب **مجاز است.**

تنها با یاد اوست که دل‌ها آرام می‌گیرد.

۱. نوع ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. متقارن ب. قطری ج. متعامد د. جایگشت

۲. اگر A و B و C ماتریس‌هایی باشند که $AB=AC$ تحت چه شرایطی می‌توان $B=C$ را نتیجه گرفت؟

الف. A دارای مقدار ویژه صفر نباشد ب. $|B|=0$

ج. $\det(AB)=\det(AC)$ د. B و C نامنفرد باشند

۳. هرگاه A یک ماتریس مربعی بوده و $\det(A)=-16$ باشد، در اینصورت مقدار $\det(A^{-1}A^{t})$ چقدر است؟

الف. -1 ب. 1 ج. $\frac{1}{8}$ د. $-\frac{1}{8}$

۴. وارون ماتریس بلوکی $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} B & O \\ -C & A \end{bmatrix}$

۵. اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ باشد $tr(A^{3})$ کدام است؟

الف. -19 ب. 19 ج. -1 د. 35

۶. هرگاه $X=(-5,3,0,-4)^{t}$ باشد، $\|X\|_{3}$ کدام است؟

الف. -6 ب. 12 ج. $-\sqrt[3]{180}$ د. 6

۷. کدامیک از روابط زیر می‌تواند یک نرم ماتریسی تعریف کند؟

الف. $\|A\| = \rho(A)$　　　**ب.** $\|A\| = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

ج. $\|A\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$　　　**د.** $\|A\| = (\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij})^2$

۸. عدد شرطی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **با استفاده از نرم بینهایت کدام است؟**

الف. -10　　　**ب.** 10　　　**ج.** -2　　　**د.** -5

۹. اگر دستگاه $\begin{cases} 10^{-5} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ **را بدون محورگیری جزئی به روش حذفی گاوس حل کنیم مقدار** x_1 **کدام مقدار به دست می‌آید؟**

الف. ۲　　　**ب.** -1　　　**ج.** ۱　　　**د.** ۰

۱۰. اگر ماتریس معین مثبت $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4/25 & 2/75 \\ 1 & 2/75 & 3/5 \end{bmatrix}$ **را به روش چولسکی** (LL^t) **تجزیه کنیم مقادیر** l_{21} **و** l_{22} **به ترتیب کدام است؟**

الف. $0/5, \sqrt{2}$　　　**ب.** $2, -0/5$　　　**ج.** $-0/5, 2$　　　**د.** $-0/5, \sqrt{2}$

۱۱. ماتریس روش ژاکوبی برای حل دستگاه
$$\begin{cases} ۰/۴x+۰/۱y+۰/۲z=۱/۲ \\ ۰/۱x+۰/۵y+۰/۱z=۱/۴ \\ ۰/۲x+۰/۱y+۰/۴z=۱/۶ \end{cases}$$
برابر است با:

الف. $B_j=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۵} & ۱ & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$

ب. $B_j=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۵} & ۰ & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix}$

ج. $B_j=\begin{bmatrix} -۱ & -\frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۵} & -۱ & -\frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۴} & -۱ \end{bmatrix}$

د. $B_j=\begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۴} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۵} & ۰ & -\frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۴} & ۰ \end{bmatrix}$

۱۲. ماتریس روش تکراری گاوس- سایدل کدامیک از ماتریس‌های زیر است؟

الف. $B_g=(L+D)^{-۱}b$

ب. $B_g=-D^{-۱}(L+U)$

ج. $B_g=-(L+D)^{-۱}U$

د. $B_g=(L+U)^{-۱}D$

۱۳. در حل دستگاه خطی به روش گاوس سایدل بزرگترین وکوچکترین مقدار ویژه ماتریس B_g به ترتیب برابر $\frac{۳}{۴},-\frac{۲}{۵}$ می‌باشد بهترین انتخاب ω برای روش SOR کدام است؟

الف. ۲/۰۸۳

ب. ۱/۲۱

ج. ۱/۷۶

د. ۰/۶۲۵

۱۴. هرگاه $-\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۵}$ مقادیر ویژه ماتریس $A_{۳\times۳}$ باشند، مقادیر ویژه ماتریس $(A^{۲})^{-۱}-۷I$ کدام است؟

الف. ۱۸,−۳,۲

ب. −۲,−۵,−۱۰

ج. ۱۶,۱۱,۳۲

د. ۲۵,۹,۴

۱۵. مقادیر ویژه ماتریس‌های متعامد:

الف. صفر یا موهومی محض است ب. ± 1 است

ج. حقیقی و مثبت است د. حقیقی و منفی است

۱۶. هرگاه $A=\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، $\|A\|_2$ کدام است؟

الف. ۴ ب. $2\sqrt{10}$ ج. ۸ د. ۴۰

۱۷. هرگاه روش توانی را برای تقریب بزرگترین مقدار ویژه $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ با بردار اولیه $y^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ به کار گیریم، پس از دو تکرار چه مقداری برای λ_1 بدست می‌آید؟

الف. $\frac{3}{5}$ ب. $\frac{19}{5}$ ج. $\frac{13}{5}$ د. ۵

۱۸.اگر بخواهیم به روش ژاکوبی ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ را به ماتریس سه قطری تبدیل کنیم مقدار θ چقدر است ؟

الف. $75/96^\circ$ ب. $37/98^\circ$ ج. $38/97^\circ$ د. $56/79^\circ$

۱۹. اگر بخواهیم به روش هاوس هلدر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۳ & -۲ \\ ۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ **را سه قطری کنیم، ماتریس روش هاوس هلدر برای آن کدام است؟**

الف. $P_۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

ب. $P_۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

ج. $P_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

د. $P_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۰. معادله مشخصه ماتریس هسنبرگی $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$ **کدام است؟**

الف. $\lambda^۳-۱۲\lambda^۲+۷\lambda-۴=۰$

ب. $\lambda^۳+۱۲\lambda^۲-۶\lambda+۴=۰$

ج. $\lambda^۳-۱۴\lambda^۲+۴۶\lambda-۳۲=۰$

د. $\lambda^۳+۱۴\lambda^۲-۴۶\lambda-۳۲=۰$

سئوالات تشریحی

بارم هر سئوال ۲ نمره است

*** تنها به یکی از سئوالات ۱ یا ۲ پاسخ دهید**

۱. اگر A در رابطه $A^۳+A^۲+A+I=O$ صدق کند، نشان دهید A وارون‌پذیر است. سپس وارون آن را مشخص کنید.

۲. قضیه: ثابت کنید $\rho(A^t A) = \|A\|_۲^۲$

۳. جواب دستگاه زیر را به روش تکراری گاوس- سایدل تا سه تکرار و با بردار اولیه $X^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ محاسبه کنید. (محاسبات تا چهار رقم اعشار در نظر گرفته شود)

$$\begin{cases} ۶x - y - z = ۵ \\ -x + ۶y - z = ۱۲ \\ -x - y + ۶z = -۹ \end{cases}$$

۴. معادله مشخصه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$ را به روش کریلف محاسبه کنید.(بردار $Y^{(۰)} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ انتخاب نمایید

۵. هرگاه بدانیم $\lambda_1 = ۱۱$ و $X^{(1)} = (\frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۴})^t$ مقدار ویژه غالب و بردار ویژه متناظر آن است، به کمک روش تقلیل مقادیر ویژه دیگر ماتریس A را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱۰ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$$

۶. معادله دیفرانسیل با مقدار مرزی زیر را به ازای $h = ۰/۲$ حل کنید. (حل دستگاه نهایی لازم نیست)

$$y'' + xy' + x^۲ y = \sin x$$
$$y(۰) = ۰ \qquad ۰ \le x \le ۱$$
$$y(۱) = ۱$$

مرکز آزمون
کلید سؤالات تشریحی (محرمانه)

نام درس: آنالیز عددی ۲ — صفحه: ۱ از ۱

کد درس: ۱۱۱۱۰۷۵ - ۱۱۱۹۰۰۴

رشته تحصیلی - گرایش: ریاضی - علوم کامپیوتر

مقطع: کارشناسی — سال تحصیلی: ۹۰-۸۹ — نیمسال: اول ○ دوم ⊗ ترم تابستان ○ — تاریخ آزمون: ۳/۲۱ — بارم: ۲ نمره

~~* فقط به یکی از سوالات ۱ یا ۲ پاسخ دهید~~

۱- ماتریس A وارون پذیر است هرگاه ماتریس B موجود باشد که $BA = AB = I$.

$$A^3+A^2+A+I=0 \Rightarrow I=-A^3-A^2-A=A(-A^2-A-I)=AB$$

لذا A وارون پذیر است و $A^{-1}=-A^2-A-I$

۲- قضیه ۲۳ صفحه ۱۴۴ کتاب.

۳-

$$\begin{cases} x^{(k)}=\frac{1}{6}(5+y^{(k-1)}+z^{(k-1)}) \\ y^{(k)}=\frac{1}{6}(12+x^{(k)}+z^{(k-1)}) \\ z^{(k)}=\frac{1}{6}(-9+x^{(k)}+y^{(k)}) \end{cases} \xrightarrow{x^{(0)}=y^{(0)}=z^{(0)}=0} \begin{cases} x^{(1)}=\frac{5}{6}=0.8333 \\ y^{(1)}=\frac{1}{6}(12+0.8333)=2.1389 \\ z^{(1)}=\frac{1}{6}(-9+0.8333+2.1389)=-1.0046 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{(2)}=\frac{1}{6}(5+2.1389-1.0046)=1.0224 \\ y^{(2)}=\frac{1}{6}(12+1.0224-1.0046)=2.0030 \\ z^{(2)}=\frac{1}{6}(-9+1.0224+2.0030)=-0.9958 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{(3)}=\frac{1}{6}(5+2.0030-0.9958)=1.0012 \\ y^{(3)}=\frac{1}{6}(12+1.0012-0.9958)=2.0009 \\ z^{(3)}=\frac{1}{6}(-9+1.0012+2.0009)=-0.99965 \end{cases}$$

که جواب واقعی دستگاه $x=1$، $y=2$ و $z=-1$ می‌باشد.

۴-

$$Y^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow Y^{(1)}=AY^{(0)}=\begin{bmatrix}2\\10\\3\end{bmatrix} \Rightarrow Y^{(2)}=AY^{(1)}=\begin{bmatrix}40\\62\\69\end{bmatrix} \Rightarrow Y^{(3)}=AY^{(2)}=\begin{bmatrix}404\\862\\561\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}40&2&1\\62&10&0\\69&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}404\\862\\561\end{bmatrix} \Rightarrow P_1=-6,\ P_2=-49,\ P_3=-66 \Rightarrow P(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2-49\lambda-66$$

۵- مثال ۲۰ صفحه ۱۸۱ یا مثال ۲۱ صفحه ۱۸۵.

۶- تمرین اول صفحه ۲۲۸ کتاب. چون $h=0.2$ و $x_0=0$، داریم $x_i=0.2i$ ، $i=0,1,\dots,5$. همچنین با توجه به شرایط مرزی داریم: $y(x_5)=y(1)=y_5=1$ و $y(x_0)=y(0)=y_0=0$

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+x_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+x_i^2y_i=\sin x_i \xrightarrow{h=0.2} (2-0.2x_i)y_{i-1}-(4-0.08x_i^2)y_i+(2+0.2x_i)y_{i+1}=0.08\sin x_i$$

$$\begin{aligned} i=1 &\Rightarrow 1.9600y_0-3.9968y_1+2.0400y_2=0.0159 \\ i=2 &\Rightarrow 1.9200y_1-3.9872y_2+2.0800y_3=0.0312 \\ i=3 &\Rightarrow 1.8800y_2-3.9712y_3+2.1200y_4=0.0452 \\ i=4 &\Rightarrow 1.8400y_3-3.9488y_4+2.1600y_5=0.0574 \end{aligned} \xrightarrow[y_5=1]{y_0=0} \begin{cases} -3.9968y_1+2.0400y_2=0.0159 \\ 1.9200y_1-3.9872y_2+2.0800y_3=0.0312 \\ 1.8800y_2-3.9712y_3+2.1200y_4=0.0452 \\ 1.8400y_3-3.9488y_4=-2.1026 \end{cases}$$