تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ **زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰**

نام درس: آنالیز عددی ۲- آنالیزعددی

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی کاربردی و محض۱۱۱۱۰۷۵علوم کامپیوتر ۱۱۱۹۰۰۴ –ریاضیات کاربردها علوم کامپوتر۸۹ به بعد ۱۱۱۱۴۱۴

-

استفاده از: ماشین حساب **مجاز است.**

۱. برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$ کدام گزینه صحیح است؟

الف. $tr(A^{۳}) = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i^{۳}$ ب. $tr(\lambda A) = \lambda^n tr(A)$

ج. $tr(A) = tr(A^{-۱})$ د. $tr(I_n) = ۱$

۲. کدام گزاره صحیح است؟

الف. وارون یک ماتریس بالا مثلثی ، یک ماتریس پایین مثلثی است

ب. حاصل ضرب یک ماتریس بالا مثلثی در یک ماتریس پایین مثلثی یک ماتریس هم قطری است

ج. وارون یک ماتریس متعامد، متعامد است

د. دترمینان یک ماتریس مثلثی، حاصلجمع درایه‌های قطری آن است

۳. رتبه $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۹ & ۱۳ & ۱۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۵ & ۷ & ۹ \\ ۴ & ۷ & ۱۰ & ۱۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. ۱ ب. ۲ ج. ۳ د. ۴

۴. اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و وارون‌پذیر باشند کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف. $(A+B)^{-۱} = A^{-۱} + B^{-۱}$ ب. $(AB)^{-۱} = A^{-۱}B^{-۱}$

ج. $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$ د. $(AB)^{-۱} = (AB)^T$

۵. کدامیک بردار ویژه $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ متناظر مقدار ویژه $\lambda = ۲$ است؟

الف. (۱و۱) ب. (۲و۲) ج. $(۱,\frac{۱}{۲})$ د. (۳و۲)

۶. با فرض $X^T = (۵,۲,-۱)$ ، $\|X\|_۳$ کدام است؟

الف. $\sqrt[۳]{۱۳۴}$ ب. ۱۳۴ ج. $\sqrt[۳]{۱۳۲}$ د. ۱۳۲

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ **زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰**

نام درس: آنالیز عددی ۲- آنالیزعددی

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی کاربردی و محض۱۱۱۱۰۷۵علوم کامپیوتر ۱۱۱۹۰۰۴ –ریاضیات کاربردها علوم کامپیوتر۸۹ به بعد ۱۱۱۱۴۱۴

-

استفاده از: ماشین حساب **مجاز است.**

۷. با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۵ \\ ۲ & -۴ & ۶ \end{bmatrix}$، $\|A\|_\infty$ کدام است؟

الف. ۲ ب. ۴ ج. ۱۱ د. ۱۲

۸. اگر A یک ماتریس همگرا باشد کدام گزینه در مورد A صحیح است؟

الف. $\rho(A)=۱$ ب. $\rho(A)<۱$ ج. $\|A\|=\pm ۱$ د. $\|A\|=۰$

۹. کدام گزینه صحیح است؟

الف. اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، اکیداً قطری غالب است

ب. اگر A یک ماتریس نامنفرد باشد، معین مثبت است

ج. اگر A یک ماتریس معین مثبت باشد، نامنفرد است

د. اگر A یک ماتریس متعامد باشد، اکیداً قطری غالب است

۱۰. اگر روش حذفی گوس با محورگیری کامل را روی $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} & ۱ & \frac{۵}{۲} \\ ۰ & ۳ & -۱ & ۲ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۳ & \frac{-۹}{۲} \end{bmatrix}$ اعمال کنیم، پس از جابجایی‌های لازم داریم:

الف. $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۲ & ۱ \\ ۰ & \frac{-۹}{۲} & ۳ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & \frac{۵}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

ب. $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & \frac{۵}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & \frac{-۹}{۲} & ۳ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

ج. $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۲ & ۳ \\ ۰ & \frac{-۹}{۲} & ۱ & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & \frac{۵}{۲} & ۳ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

د. $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۲ & ۱ \\ ۰ & \frac{۵}{۲} & ۱ & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & \frac{-۹}{۲} & ۳ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ — زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

نام درس: آنالیز عددی ۲- آنالیزعددی

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی کاربردی و محض۱۱۱۱۰۷۵علوم کامپیوتر ۱۱۱۹۰۰۴ –ریاضیات کاربردها علوم کامپوتر۸۹ به بعد ۱۱۱۱۴۱۴

-

استفاده از: ماشین حساب **مجاز است.**

۱۱. در تجزیه کروت $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ به صورت L, Lu کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۱۲. با فرض $A = L + D + U$ (L پایین مثلثی اکید، D قطری اکید، U بالا مثلثی اکید) در چه صورت روش ژاکوبی برای حل $Ax = b$ به ازاء هر انتخاب دلخواه اولیه $x^{(0)}$ همگراست؟

الف. $\left\| D(L+U)^{-1} \right\| < 1$ ب. $\rho((L+D^{-1})U) < 1$

ج. $\left\| (L+D)U^{-1} \right\| < 1$ د. $\rho(D^{-1}(L+U)) < 1$

۱۳. مقادیر ویژه A^{-1}، با فرض $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ کدام است؟

الف. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{5}$ ب. $-5, 6, 2$ ج. $-6, -2, 5$ د. $\frac{1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{2}$

۱۴. اگر مقادیر ویژه A برابر $1, -1, 2$ باشد مقادیر ویژه $B = A^3 - 2A$ کدام است؟

الف. $3, -1, 4$ ب. $-1, -1, 4$ ج. $1, -1, 4$ د. $-3, 1, 4$

۱۵. جمله ثابت معادله مشخصه ماتریس $A_{4\times 4}$ برابر است با:

الف. $tr(A)$ ب. $\pm \det(A)$ ج. $\pm tr(A)$ د. $\det(A)$

۱۶. با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ داریم:

الف. $tr(A^3) = 218, \det(A^3) = 216$ ب. $tr(A^3) = 216, \det(A^3) = 218$

ج. $tr(A^3) = 8, \det(A^3) = 6$ د. $tr(A^3) = 6, \det(A^3) = 8$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ — زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

نام درس: آنالیز عددی ۲- آنالیزعددی

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی کاربردی و محض۱۱۱۱۰۷۵علوم کامپیوتر ۱۱۱۹۰۰۴ –ریاضیات کاربردها علوم کامیوتر۸۹ به بعد ۱۱۱۱۴۱۴

-

استفاده از: ماشین حساب **مجاز است.**

۱۷. کدام گزینه از دایره‌های گرشگورین ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}$ می‌باشد؟

الف. $\{\lambda \in \mathbb{C}:, |\lambda - ۴| \le ۲\}$

ب. $\{\lambda \in \mathbb{C}:, |\lambda - ۲| \le ۳\}$

ج. $\{\lambda \in \mathbb{C}:, |\lambda - ۹| \le ۱۱\}$

د. $\{\lambda \in \mathbb{C}:, |\lambda - ۱| \le ۵\}$

۱۸. با فرض اینکه A وارون‌پذیر است. کدام گزینه صحیح است؟

الف. با روش توانی معکوس کوچکترین مقدار ویژه A^{-1} قابل محاسبه است

ب. با روش توانی معکوس کوچکترین مقدار ویژه A^{-1} از لحاظ قدر مطلق قابل محاسبه است

ج. با روش توانی معکوس کوچکترین مقدار ویژه A از لحاظ قدر مطلق قابل محاسبه است

د. با روش توانی معکوس کوچکترین مقدار ویژه A قابل محاسبه است

۱۹. اگر شعاع طیفی ماتریس $A^T A$ برابر ۳۶ باشد $\|A\|_۲$ کدام است؟

الف. ۶ ب. ۴ ج. ۳۶ د. ۱

۲۰. $A \cup \{(۱,۱,۱), (۳,۵,۱)\}$ یک مجموعه مستقل خطی است. A می‌تواند کدام بردار باشد؟

الف. $(-۲,-۴,۰)$

ب. $(۵,۷,۳)$

ج. $\{(۰,۰,۰)\}$

د. $\{(۱,۲,۲)\}$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ **زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰**

نام درس: آنالیز عددی ۲- آنالیزعددی

رشته تحصیلی/ کُد درس: ریاضی کاربردی و محض۱۱۱۱۰۷۵علوم کامپیوتر ۱۱۱۹۰۰۴ –ریاضیات کاربردها علوم کامپوتر۸۹ به بعد ۱۱۱۱۴۱۴

-

استفاده از: **مجاز است.**

سئوالات تشریحی

بارم هر سئوال ۲ نمره می‌باشد.

۱. ثابت کنید که اگر x_t جواب واقعی و x_e جواب محاسبه شده دستگاه $Ax=b$ و $C(A)$ عدد شرطی ماتریس A باشد آنگاه:

$$\frac{\|r\|}{C(A)\|b\|} \le \frac{\|x_t - x_e\|}{\|x_t\|} \le \frac{C(A)\|r\|}{\|b\|}$$ ، توضیح: $r = Ax_t - Ax_e$

۲. دستگاه معادلات $\begin{cases} ۱۰x_۱ - ۲x_۲ - x_۳ = ۳ \\ -x_۱ + ۵x_۲ - x_۳ = ۶ \\ -x_۱ - x_۲ + ۲x_۳ = ۳ \end{cases}$ را به روش ژاکوبی و گوس- سایدل با فرض $x^{(۰)} = (۰,۰,۰)$ حل کنید. ($x^{(۲)}$ را به دست آورید)

۳. معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه و مرزی داده شده با استفاده از روش تفاضلات متناهی با خطای برشی $O(h^۲)$ حل کنید.

$$y'' + ۴y' + xy = e^x$$
$$\begin{cases} y(۰) = ۰ \\ y(۱) = ۰ \\ ۰ \le x \le ۱ \end{cases}$$

۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{du(t)}{dt} = ۲u(t) + ۶v(t)$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -۲u(t) - ۵v(t)$$

۵. با استفاده از تجزیه چولسکی ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}$ جواب دستگاه $Ax=b$ که $b = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۱ \\ ۱۴ \end{bmatrix}$ را بیابید.