

نام درس: جبر خطی عددی

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۱۱۱۱۱۰۵

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۹۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

\* استفاده از ماشین حساب مجاز است.

۱. در کدام تجزیه  $LU$  برای ماتریس  $A$ ، هر عنصر  $L$  توسط ریشه دوم عنصر قطری نظیرش در  $A$  کران دار می شود؟الف. دولیتل      ب. کرات      ج. چولسکی      د.  $SOR$ ۲. هر نگاشت مانند  $J \rightarrow J$  که در آن  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  و  $n$  عددی ثابت است را چه می نامند؟الف. جایگشت      ب.  $p$ -ماتریس      ج.  $Q$ -ماتریس      د. شکاف۳. کدام رابطه درست نیست؟ ( $A$  یک ماتریس  $n \times n$  دلخواه است).

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{ب.} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{الف.}$$

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \quad \text{د.} \quad \|A\|_p = \rho(AA^T) \quad \text{ج.}$$

۴. در مورد نرم ها کدام رابطه نادرست است؟

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{ب.} \quad \|A\|_p = \max_{\substack{\|x\|_p=1 \\ \|y\|_p=1}} |y^T Ax| \quad \text{الف.}$$

$$n^{-1} \|A\|_p \leq n^{\frac{-1}{p}} \|A\|_\infty \quad \text{د.} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_p \quad \text{ج.}$$

۵. گزینه نادرست را مشخص کنید.

الف. هر دو نرم دلخواه بر روی یک فضای برداری با بعد متناهی به مفهوم یکسانی از همگرایی منجر می شود.

ب. هر دنباله کشی در یک فضای خطی نرمدار با بعد متناهی همگراست.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^{(k)} - v\| = 0 \quad \text{ج.} \quad \text{یک دنباله مفروض، به بردار } v \text{ همگراست اگر}$$

$$\text{د. در } \mathcal{R}^n, \quad \|v^{(k)} - v\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{لزوما نتیجه نمی شود} \rightarrow \|v^{(k)} - v\|_p$$

نام درس: جبر خطی عددی

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۱۱۱۱۱۰۵

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۹۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۶. اگر  $A, B$  ماتریس های  $n \times n$  باشند به طوری که  $\|I - AB\| < 1$ ، آن گاه:

$$\text{الف. } A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - AB)^k \quad \text{ب. } B^{-1} = A \sum_{k=0}^{\infty} (I - AB)^k$$

$$\text{ج. } A^{-1} = B \sum_{k=0}^n (I - AB)^k \quad \text{د. } B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - AB)^k A$$

۷. کدام شرط برای همگرایی روش تکراری  $Qx^{(k)} = (Q - A)x^{(k-1)} + b, (k \geq 1)$  در حل دستگاه  $Ax = b$  با هر بردار اولیه ای کافیست؟

$$\text{الف. اگر برای نرم ماتریسی طبیعی ای داشته باشیم } \|I - Q^{-1}A\| < 1$$

$$\text{ب. } \forall \varepsilon > 0, \|I - QA\| < \varepsilon$$

$$\text{ج. } \|x^{(k)} - x\| \geq (I - Q^{-1}A)(x^{(k-1)} - x)$$

$$\text{د. } \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$$

۸. در روش ژاکوبی، ماتریس  $Q$  در دنباله تکراری  $Qx^{(k)} = (Q - A)x^{(k-1)} + b$  چه ماتریسی است؟

الف. ماتریسی قطری است که درایه های قطری آن همان درایه های قطری ماتریس  $A$  است.

ب. قسمت پایین مثلثی  $A$  که شامل قطر است.

ج. قسمت بالایی مثلثی  $A$  که شامل قطر است.

د. ماتریس همانی

۹. عبارت " $B$  یک معکوس تقریبی  $A$  است" به کدام تعبیر نزدیک تر است؟

$$\text{الف. } \|I - AB\| < 1 \quad \text{ب. } \forall \varepsilon > 0, \|I - AB\| < \varepsilon$$

$$\text{ج. } \|A^{-1}\| = \|B\| \quad \text{د. } A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

نام درس: جبر خطی عددی

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۱۱۱۱۱۰۵

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۹۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۱۰. شرط لازم و کافی همگرایی فرمول تکراری  $x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + C$  به ازای هر بردار اولیه‌ای چیست؟

الف.  $\rho(G) \leq 1$  ب.  $\rho(A) \leq 1$  ج.  $\rho(G) < 1$  د.  $\rho(A) < 1$

۱۱. روش توانی معکوس برای محاسبه چه چیزی کاربرد دارد؟

الف. مقدار ویژه نزدیک به عدد خاص ب. کوچک ترین مقدار ویژه از لحاظ قدر مطلق

ج. مقدار ویژه غالب از لحاظ قدر مطلق د. مقدار ویژه غالب و بردار مقدار ویژه غالب

۱۲. صورت قضیه شور چه می گوید؟

الف. هر ماتریس مربعی مشابه یک ماتریس مثلثی است.

ب. هر ماتریس هرمیتی به طور یکانی مشابه یک ماتریس قطری است.

ج. ماتریس های مشابه مقادیر ویژه یکسان دارند.

د. هر ماتریس مربعی به طور یکانی مشابه یک ماتریس مثلثی است.

۱۳. اثر یک ماتریس برابر است با :

الف. حاصل ضرب مقادیر ویژه ب. مجموع مقادیر ویژه

ج. حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی د. مجموع مربعات مقادیر ویژه

۱۴. فرآیند گرام اشمیت بر روی ستون های یک ماتریس  $m \times n$  مانند  $A$  و از مرتبه  $n$  به کار برده می شود، چه تجزیه‌ای

حاصل می گردد؟

الف.  $A = BT$  که در آن  $B$  یک ماتریس  $m \times n$  با ستون های یکا متعامد بوده و  $T$  یک ماتریس  $n \times n$  با عناصر قطری منفی است.

ب.  $A = BT$  که در آن  $B$  یک ماتریس  $m \times n$  با ستون های یکا متعامد بوده و  $T$  یک ماتریس بالا مثلثی  $n \times n$  با عناصر قطری مثبت است.

ج.  $A = BT$  که در آن  $B$  یک ماتریس  $n \times n$  با ستون های یکا متعامد بوده و  $T$  یک ماتریس  $n \times n$  با عناصر قطری منفی است.

د.  $A = BT$  که در آن  $B$  یک ماتریس  $n \times n$  با ستون های یکا متعامد بوده و  $T$  یک ماتریس بالا مثلثی  $n \times n$  با عناصر قطری مثبت است.

نام درس: جبر خطی عددی

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۱۱۱۱۱۰۵

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۹۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۱۵. مفیدترین تجزیه متعامد است؟

الف. چولسکی      ب. هاوس هولدر      ج. گرام اشمیت      د. شور

۱۶. ماتریس  $A$  را پیچشی نامند هرگاه:

الف.  $A^T = I$       ب.  $AA^* = I$

ج.  $A = A^*$       د.  $AA^* = A^T$

۱۷. شرط  $\rho(A) < 1$ ، معادل کدام شرط است؟

الف.  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow 0} Ax \geq \varepsilon$       ب.  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0$

ج.  $\forall Q \in \mathcal{R}^{n \times n}, \rho(I - Q^{-1}A) < 1$       د.  $\forall Q \in \mathcal{R}^{n \times n}, \rho(I - Q^{-1}A) \geq 1$

۱۸. در فضای بردارهای  $n$ -بعدی مختلط، کدام عبارت نادرست است؟

الف.  $\|x\|_p = \sqrt{\langle x^*, x \rangle}$

ب.  $A$  هرمیتی است هرگاه  $A^* = A$ ج.  $A$  مثبت معین است  $\langle Ax, x \rangle > 0$ ،  $\forall x \neq 0$ د. اگر  $A$  هرمیتی باشد، آن گاه  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ 

۱۹. «متعادل سازی سطری» عبارت است از:

الف. فرآیند تقسیم هر سطر از ماتریس ضرایب بر عنصر ماکزیم آن سطر از لحاظ مقدار مطلق.

ب. فرآیند ضرب هر سطر از ماتریس ضرایب در عنصر ماکزیم آن سطر.

ج. فرآیند ضرب تمام سطرهای ماتریس در عنصر ماکزیم.

د. فرآیند تقسیم تمام سطرهای ماتریس بر عنصر ماکزیم از نظر قدر مطلق.

نام درس: جبر خطی عددی

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۱۱۱۱۱۰۵

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۹۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۲۰. کدام یک از دوائر زیر، دایره قضیه گرشگورین برای ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & -5 \end{bmatrix}$  است؟

$$\text{ب. } \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 3\}$$

$$\text{الف. } \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 4\}$$

$$\text{د. } \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$$

$$\text{ج. } \{z \in \mathbb{C} : |z + 5| \leq 13\}$$

## سوالات تشریحی

هر سوال تشریحی ۲ نمره دارد.

۱. تجزیه  $LU$  ماتریس زیر را که در آن  $L$  یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطری ۲ است، تعیین کنید:

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

۲. نشان دهید روش حذفی گاوس بدون محورگیری اکیدا غالب قطری بودن یک ماتریس را حفظ می کند.

۳. روش توانی را بر روی ماتریس و بردار اولیه زیر به کار برید: (سه تکرار کافی است)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad x = (-1, 1, 1)^T$$

۴. با استفاده از الگوریتم هاوس هولدر یک گام از تجزیه  $QR$  ماتریس زیر را بیابید: (نوشتن یک گام اول کافی است).

$$A = \begin{bmatrix} 63 & 41 & -88 \\ 42 & 60 & 51 \\ 0 & -28 & 56 \\ 126 & 82 & -71 \end{bmatrix}$$

نام درس: جبر خطی عددی

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۱۱۱۱۱۰۵

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۹۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۶

۵. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} ۲x_1 - x_۲ = ۲ \\ x_1 + ۶x_۲ - ۲x_۳ = -۴ \\ ۴x_1 - ۳x_۲ + ۸x_۳ = ۵ \end{cases}$$

تکرار گاوس - سایدل را با بردار اولیه  $x^{(۰)} = (۰, ۰, ۰)^T$  به کار ببرید، (با دقت ۳ رقم اعشار، ۳ تکرار کافی است).



پاسخ سؤالات تشریحی درس: جبر خطی عددی رشته: علوم کامپیوتر - جمع صفحه: ۱

سال تحصیلی ۸۷-۸۸ نيمسال اول  نيمسال دوم  بارم هر سؤال تشریحی ۲ نمره

۱. آنالیز عددی کینکید، جلد اول، صنف ۲۲۹، مسائل ۲.۴، سوال ۳۶ :

به سادگی، با توجه به یا شین مثلثی بودن  $L$ ، رابلا مثلثی بودن  $V$ ، خواص ضرب ماتریسی و مساوی دو تکرار دادن عناصر قطری  $L$ ، عناصر زیر به ترتیب بد دست می آیند:

$$u_{11}=3, u_{12}=5, u_{13}=0, l_{21}=4, u_{22}=3, u_{23}=2$$

$$l_{31}=0, l_{32}=3, u_{33}=4$$

۲. آنالیز عددی کینکید، جلد اول، صنف ۲۵۱، مقصیه ۵.

۳. آنالیز عددی کینکید، جلد اول، صنف ۳۶۳، مثال ۱.

۴. آنالیز عددی کینکید، جلد اول، صنف ۳۹۵، مثال ۱.

۵.

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{2} x_2^{(k-1)} + 1$$

$$x_2^{(k)} = -\frac{1}{6} x_1^{(k)} + \frac{1}{3} x_3^{(k-1)} - \frac{2}{3}$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{2} x_1^{(k)} + \frac{3}{8} x_2^{(k)} + \frac{5}{8}$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = (1, -0.833, -0.187)^T$$

$$x^{(2)} = (0.583, -0.826, 0.024)^T$$

$$x^{(3)} = (0.587, -0.756, 0.048)^T$$

پاسخ سؤالات تشریحی درس:

حیض عدوی (روجموع) رشته: علوم کامپیوتر

صفحه ۱

سال تحصیلی ۸۸-۸۷ نيمال اول نيمال دوم 

هر سوال ۲ نمره

۱. آناлиз عدوی کينيد ، صنف ۲۲۰ ، مثال ۱ .

۲. آناлиз عدوی کينيد ، جلد اول ، فصل چهارم ، صنف ۲۷۰ ، مثال ۳ .

۳. آناлиз عدوی کينيد ، جلد اول ، فصل پنجم ، صنف ۴۲۳ ، مثال ۱ .

۴. آناлиз عدوی کينيد ، جلد اول ، فصل چهارم ، صنف ۲۸۲ ، ۲۸۳ ، مثال ۱ .

توضیح: بر سوال تشریحی ۲ نمره دارد .

زمان آزمون تشریحی: ۸۰ دقیقه .