نمونه سؤالات فصل چهارم ریاضی « بردار و هندسه تحلیلی »

۱. نیمسال اول ۹۱-۹۰

تست: فرض کنید $\vec{a}=(3,-2,4)$ و $\vec{b}=(2,1,-3)$ در این صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر است با

الف) $(2,17,7)$ ب) $(-2,17,7)$

ج) $(2,-17,7)$ د) $(2,17,-7)$

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$$

$$\begin{cases}\vec{A}=(x_1,y_1,z_1)\\ \vec{B}=(x_2,y_2,z_2)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}a=(3,-2,4)\\ b=(2,1,-3)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{C}=\vec{a}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

$$=((-2)(-3)-4)\vec{i}+(8-(3)(-3))\vec{j}+(3-(-2)(2))\vec{k}$$

$$=2\vec{i}+17\vec{j}+7\vec{k}=(2,17,7)$$

جواب صحیح گزینه الف

---

۲. نیمسال دوم ۹۰-۸۹

تست: طول تصویر بردار $\vec{OA}=3\vec{j}+2\vec{i}+4\vec{k}$ روی بردار $\vec{OB}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ برابر کدام است؟

الف) $\sqrt{3}$ ب) $\frac{3}{\sqrt{29}}$ ج) $\frac{\sqrt{29}}{3}$ د) $3\sqrt{3}$

تصویر بردار A بر بردار B که آن را بصورت Proj_B^A نمایش میدهیم برابر است با

$$\boxed{\text{Proj}_B^A=\frac{A\cdot B}{|B|^2}B=\left(\frac{A\cdot B}{B\cdot B}\right)B}$$

و طول این تصویر از رابطه زیر بدست میآید

$$\boxed{|\text{Proj}_B^A|=\frac{A\cdot B}{|B|}}$$

$OA = (۲, ۳, ٤)$

$OB = (۱, ۱, ۱)$

$$|\text{proj}_B^A| = \frac{A.B}{|B|} = \frac{(x_1 \cdot x_2) + (y_1 \cdot y_2) + (z_1 \cdot z_2)}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}}$$

$$= \frac{(۲ + ۳ + ٤)}{\sqrt{۱+۱+۱}} = \frac{۹}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

جواب صحیح گزینه د میباشد

---

۳. نیمسال دوم ۹۰-۸۹:

تست: خط $\frac{۳z+۱}{-۱} = \frac{۲y-۱}{۳} = ۲x-۱$ نسبت به صفحه $٤x - ۲y - ۳z + 5 = 0$ چه وضعیتی دارد؟

الف) عمود بر صفحه

ب) موازی صفحه

ج) زاویه آن با صفحه $\frac{\pi}{٤}$

د) در صفحه

$۲x - ۱ = \frac{۲y-۱}{۳} = \frac{۳z+۱}{-۱}$ بردار $\vec{v}$ بردار هادی خط $\Rightarrow \vec{v} = (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۳})$

$٤x - ۲y - ۳z = -۵$ $\Rightarrow$ بردار نرمال صفحه $N = (٤, -۲, -۳)$

$$\vec{N} \cdot \vec{v} = \left((\frac{۱}{۲})(٤) + (\frac{۳}{۲})(-۲) + (-\frac{۱}{۳})(-۳)\right) = ۲ - ۳ + ۱ = 0$$

چون حاصلضرب داخلی بردار نرمال صفحه و خط برهم عمود هستند پس خط و صفحه موازیند

گزینه ب صحیح میباشد

---

٤. نیمسال دوم ۹۰-۸۹:

تست: معادله صفحه‌ای که از نقطه $(\frac{۱}{۲}, -۱, ۲)$ گذشته و بر خط $\frac{x-۱}{-۲} = ۲y = \frac{z+۱}{-۱}$ عمود است عبارتست از

الف) $۲x + ۳y - z - ٤ = 0$

ب) $-٤x + y - ۲z - ۷ = 0$

ج) $-٤x + y - ۲z + ۷ = 0$

د) $-۲x + y - z + ٤ = 0$

معادله صفحه‌ای که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بر بردار $\vec{n}(a,b,c)$ عمود باشد بصورت زیر است

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

$$\frac{x-1}{-2}=2y=\frac{z+1}{-1} \Rightarrow \vec{v}\left(\underset{a}{-2}, \underset{b}{\frac{1}{2}}, \underset{c}{-1}\right) \qquad P_0\left(\underset{x_0}{\frac{1}{2}}, \underset{y_0}{-1}, \underset{z_0}{2}\right)$$

بردار هادی خط

$$-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(y+1)-1(z-2)=0$$

$$-2x+1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}-z+2=0 \qquad \left(+1+2+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\right)$$

$$-2x+\frac{y}{2}-z+\frac{7}{2}=0 \Rightarrow \boxed{-4x+y-2z+7=0}$$

تمامی عبارت در ۲ ضرب

معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر

گزینهٔ ج صحیح میباشد

نیمسال دوم ۹۰-۸۹ :

هیئت: محل تلاقی خط

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+5t \\ z=4-6t \end{cases} \quad t\in R$$

با صفحه $x-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=2$ کدام است

الف) $(2, -\frac{4}{3}, 3)$ ب) $(2,-3,-4)$

ج) $(9,-4,-6)$ د) این خط صفحه را نوشته را قطع نمی‌کند

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3+5t \\ z=4-6t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\,\vec{a}(3, +5, -6)$$

با جایگزینی مقادیر پارامتری در معادله صفحه مقدار t را بدست میآوریم

$$(2+3t)-\frac{3}{2}(-3+5t)-\frac{3}{2}(4-6t)=2$$

$$2+3t+\frac{9}{2}-\frac{15}{2}t-6+9t=2 \Rightarrow$$

$$12t-\frac{15}{2}t+\frac{9}{2}-4=2 \Rightarrow \frac{9t}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

مقدار t را در معادلات پارامتری قرار می‌دهیم

$$x=2+3\left(\frac{1}{3}\right)=2$$
$$y=-3+5\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$
$$z=4-6\left(\frac{1}{3}\right)=2$$

گزینهٔ الف صحیح میباشد $(2, -\frac{4}{3}, 3)$

نیمسال دوم ۹۰-۸۹ :

۶. تشریحی: فرض کنید $\vec{a}=(2,-1,0)$ و $\vec{b}=(-1,-2,0)$ در اینصورت $\vec{a}\times\vec{b}$ کدام است؟

الف) $(0,0,-5)$ ب) $(2,-1,3)$ ج) $(0,0,5)$ د) $(0,-1,3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\frac{-4}{-5}=1$$

$$=(0,0,-5)$$

گزینهٔ الف صحیح می‌باشد

نیمسال ۹۰-۸۹ :

۷. تشریحی: هرگاه نقاط $O(0,0,0)$ ، $P(2,3,-1)$ ، $Q(1,-1,0)$ و $R(-1,0,2)$ مفروض باشند حجم متوازی السطوحی که OR و OQ و OP سه ضلع مجاور آن باشند کدام است

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۹ د) ۱۱

$$\vec{OP}=(2-0,\ 3-0,\ -1-0)=(2,3,-1)$$

$$\vec{OQ}=(1,-1,0)$$

$$\vec{OR}=(-1,0,2)$$

حجم متوازی السطوح

$$\vec{OP}\cdot(\vec{OQ}\times\vec{OR})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

$(2,3,-1)$ $\vec{OP}=\vec{a}$

$(1,-1,0)$ $\vec{OQ}=\vec{b}$

$(-1,0,2)$ $\vec{OR}=\vec{c}$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

حجم متوازی السطوح

$$=2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-4-6+1=-9$$

حجم مثبت و منفی ندارد و مقدارش حجم

گزینهٔ ج) صحیح است

$\vec{OQ} = \vec{a} = (1, -1, 0)$

$\vec{OP} = \vec{b} = (2, 3, -1)$

$\vec{OR} = \vec{c} = (-1, 0, 2)$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 6 + 3 = 9$$

نیمسال دوم ۸۹-۸۸ :

تست ۸. مساحت مثلث PQR با رئوس $P(1,0,1)$ و $Q(0,2,-1)$ و $R(2,1,1)$ برابر است با

الف) $\sqrt{17}$ ب) $\frac{1}{2}\sqrt{17}$ ج) 17 د) $\frac{17}{2}$

می‌دانیم که دو بردار $\vec{PQ}$ و $\vec{PR}$ در یک صفحه قرار دارند و بردار $\vec{PQ}\times\vec{PR}$ عمود بر این دو بردار می‌باشد

$R(2,1,1)$

$Q(0,2,-1)$

$P(1,0,1)$

$\vec{PQ} = \vec{a} = (-1, 2, -2)$

$\vec{PR} = \vec{b} = (1, 1, 0)$

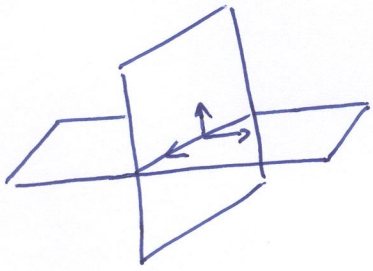
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = +2\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k} = (2, -2, -3)$$

مساحت مثلث $S = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+9} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$

گزینه ب جواب صحیح می‌باشد

نیمسال دوم ۹۰-۸۹ :

تشریحی ۹ : معادلات پارامتری خطی که محل تلاقی دو صفحه $3x-2y+4z=2$, $2x+y-3z=13$ است را بدست آورید



با توجه به شکل می بینیم که حاصلضرب خارجی دو بردار عمود بر صفحه ها ، بردار موازی خط حاصل از تلاقی دو صفحه را میدهد

$3x-2y+4z=2 \qquad \vec{N_1}=(3,-2,4)$

$2x+y-3z=13 \qquad \vec{N_2}=(2,+1,-3)$

$$\vec{a}=\vec{N_1}\times\vec{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 2 & +1 & -3\end{vmatrix}=+2\hat{i}+17\hat{j}+7\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a}=(2,17,7)}$$

حال باید یک نقطه از خط مورد نظر را داشته باشیم بنابراین معادلات دو صفحه را تلاقی داده و نقطه ای مشترک در دو صفحه پیدا می کنیم

صفحه اول $3x-2y+4z=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z$

صفحه دوم $2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z\right)+y-3z=13$

$$\frac{4}{3}+\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}z+y-3z=13 \Rightarrow \frac{7y}{3}-\frac{17}{3}z=\frac{35}{3} \quad (1)$$

اگر $z=0$ $\quad \frac{7y}{3}=\frac{35}{3} \Rightarrow \boxed{y=5}$

$y=5$ در رابطه (1) قرار میدهیم $\quad \frac{35}{3}-\frac{17z}{3}=\frac{35}{3} \Rightarrow -\frac{17z}{3}=0 \Rightarrow \boxed{z=0}$

$$x=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z=\frac{2}{3}+\frac{10}{3}=\frac{12}{3}=4 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

پس نقطه $P(4,5,0)$ روی هر دو صفحه و در نتیجه روی خط تلاقی دو صفحه قرار دارد

$$\begin{cases}P(4,5,0)\\ \vec{a}=(2,17,7)\end{cases} \Rightarrow \text{معادلات پارامتری خط} \begin{cases}x=4+2t\\ y=5+17t\\ z=7t\end{cases} \quad t\in R$$

نیمسال دوم ۸۹-۸۸ :

۱۰- تشریحی: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $A(1,0,-1)$ گذشته و با صفحه $x+y-z+2=0$ موازی باشد

وقتی صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی دیگر باشد، بردار عمود بر یک صفحه بر صفحه دوم نیز عمود است،

پس بردار نرمال یا بردار عمود بر صفحه داده شده را بدست میاریم و سپس معادله‌ی صفحه دوم رو که از نقطه داده شده عبور میکند

و بر بردار نرمال صفحه اول عمود است را بدست میاوریم

$$x+y-z+2=0 \Rightarrow \vec{N}=(1,1,-1)$$

معادله صفحه‌ای که از نقطه‌ی $P(x_0,y_0,z_0)$ می‌گذرد و بر بردار $\vec{N}(a,b,c)$ عمود باشد عبارتست از

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\begin{cases} P(1,0,-1) \\ N(1,1,-1) \end{cases}$$

معادله صفحه مسأله

$$(x-1)+(y)-(z+1)=0$$

$$x+y-z=0$$

نیمسال اول ۸۹-۸۸ :

۱۱- تستی: فاصله نقطه $(2,0,-1)$ تا صفحه $3x-2y+8z=-1$ برابر است با

الف) $\sqrt{5}$ ب) $\frac{-1}{\sqrt{77}}$ ج) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{77}}$ د) $\frac{\sqrt{77}}{77}$

فاصله نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ برابر است با

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\begin{cases} 3x-2y+8z+1=0 \\ P(2,0,-1) \end{cases}$$

$$h=\frac{|3(2)-0-8+1|}{\sqrt{9+4+64}}=\frac{6-8+1}{\sqrt{77}}=\boxed{\frac{-1}{\sqrt{77}}}\times\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{77}}=\frac{-\sqrt{77}}{77}$$

گزینه ب صحیح میباشد

نیمسال اول ۸۹-۸۸ :

۱۲. تست : نقطهٔ تلاقی خط گذرنده از مبدأ و موازی با بردار $(2,1,1)$ با صفحهٔ $x+y+2z=5$ عبارتست از

الف) $(1,1,\frac{3}{2})$ ب) $(0,1,2)$

ج) $(\frac{5}{3},\frac{5}{6},\frac{5}{6})$ د) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$

ابتدا معادلات پارامتری خط را بدست میآوریم

مبدأ $P(0,0,0)$

معادلات پارامتری خط
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

معادلات پارامتری خط را در معادله صفحه قرار میدهیم

$$x+y+2z=5$$

$$t+t+4t=5 \Rightarrow \boxed{t=\frac{5}{6}}$$

نقطهٔ تلاقی

$$\boxed{x=\frac{5}{6}}\ ,\ \boxed{y=\frac{5}{6}}\ ,\ \boxed{z=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}}$$

گزینه ج صحیح میباشد