جزوه معادلات دیفرانسیل

جناب استاد آتشی

تهیه و تنظیم : سرکار خانم ثقفی
پیام نور مرکز شمیرانات
نیمسال دوم ۹۱_۱۳۹۰

ab-rafiee.com production

«جلسه دوم»

معادلات دیفرانسیل :

فرم کلی معادله مرتبه ۱ ← $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

دیفرانسیل ←

$df = f'(x).dx$

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

Δx تغییرات است و dx حدِ Δx است به کمک حد دیفرانسیل می‌گیرند.

معادله جدایی‌پذیر ←

$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$

$$\boxed{\int M\,dx + \int N\,dy = c}$$

$e^{x+y}\,dx - e^{-x}\,dy = 0$

$e^{x}.e^{y}.dx - e^{-x}\,dy = 0 \rightarrow \div\ e^{y}.e^{-x}$

$e^{2x}\,dx - e^{-y}\,dy = 0$

جدایی‌پذیر

حل: $\int e^{2x}\,dx - \int e^{-y}\,dy = \int 0\,dx = c$

$$\frac{e^{2x}}{2} + e^{-y} = c$$

Year. Month. Date. ( )

حل $3x^2(1+y^2)dx - 2y\,dy = 0$

$$\int\left(3x^2dx - \frac{2y}{1+y^2}dy = 0\right) \rightarrow$$

جدایی پذیر — صحیح

$$1+y^2 = u$$

$$2y\,dy = du$$

$$x^3 - \int \frac{du}{u} \rightarrow x^3 - Ln(1+y^2)$$

حل $\sin x \cos^2 y\, dy - \cos^2 x\, dx = 0$

$$\cos^2 y\, dx - \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx = 0$$

جدایی پذیر

$$\text{حل} \rightarrow \int \cos^2 y\, dy - \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx = \int 0\, dx = c$$

$$\int \cos^2 y\, dy - \int \cot x \sin x\, dx = c \leftarrow$$

غلط دارد این — صحیح

حل انتگرال $u.dv$ $v du$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \frac{1+\cos 2y}{2}\, dy - \int \cot g x \sin x\, dx = c$$

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2x = c$$

$\Rightarrow \sin x \cos^2 y\, dx - \cos^2 x\, dy = 0$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \frac{1}{\cos^2 y} dy = 0$$ جدا پذیری

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int 0\, dx$$

$$\int \operatorname{tg} x . \sec x\, dx - \int \sec^2 y\, dy = C$$

$$\sec x - \operatorname{tg} y = C$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن :

تابع دو متغیره همگن . $f(x,y)$ را همگن می‌گویند هرگاه با t برابر شدن توأم x و y تابع t^n را فاکتور دهد. به n مرتبه تابع همگن گفته می‌شود.

$\exists n \,;\, f(tx, ty) = t^n f(x,y)$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2 + 4xy$

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + 4(tx . ty) = t^2 x^2 + 4t^2 xy$$

$$t^2(x^2 + 4xy) = t^2 f(x,y)$$ تابع همگن از مرتبه‌ی دو.

نکته ← در ضرب جمله‌ها اگر جمع توان‌ها در هر جمله با جملات دیگر برابر شد ⇐ همگن است.

$$\Rightarrow g(x,y) = 5x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - y^4$$

$$g(tx,ty) = 5(tx)^4 + 2(tx)^3\,ty + (tx)^2(ty)^2 - (ty)^4$$

$$g(tx,ty) = 5t^4x^4 + 2t^4x^3y + t^4x^2y^2 - t^4y^4$$

$$g(tx,ty) = t^4 f(x,y)$$ تابع همگن از مرتبه ۴

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$ ← معادله مرتبه اول

را همگن می‌نامند هرگاه M و N توابع همگن و از یک مرتبه باشند.

$$\Rightarrow (2x^2+xy)\,dx + (x-y)\,dy = 0$$

تفاوت مرتبه‌ها ⇐ همگن نیست

$$\Rightarrow \underbrace{(x-y)}_{M}dx + \underbrace{(x+y)}_{N}dy = 0$$

$$M(x,y) = x-y \longrightarrow M(tx,ty) = tx-ty = t(x-y) = tM(x,y)$$

همگن از مرتبه ۱ است.

به همین ترتیب N نیز همگن از مرتبه ۱ است. آنگاه معادله دیفرانسیل همگن است.

مثال $\sin\frac{x}{y}\,dx - \sin\frac{y}{x}\,dy = 0$

$M(x,y) = \sin\frac{x}{y} \rightarrow M(tx,ty) = \sin\frac{tx}{ty} = t^0 \sin x/y$

$t^0 M(x,y)$ M همگن از مرتبه ۰

به همین ترتیب N نیز همگن از مرتبه ۰ است پس معادله همگن است از مرتبه ۰.

روش حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن:

ابتدا تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ ($y = vx$) را می‌دهیم:

$y = vx \rightarrow dy = dv\,x + dx\,v$

پس دو عبارت بالا را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم در این حالت یک معادله جدایی پذیر برحسب v و x بدست می‌آید:

مثال $(x^2 + xy)\,dx - y^2\,dy = 0$

معادله همگن است.

$f(tx,ty) = \left((tx)^2 + (tx)(ty)\right)dx - (ty)^2\,dy = 0$

$t^2(x^2 + xy)\,dx - t^2 y^2\,dy = t^2 f(x,y)$

فرض $y = vx \rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$

جایگذاری $\rightarrow (x^2 + xvx)\,dx - v^2x^2(x\,dv + v\,dx) = 0$

$$(x^2 + x^2v + v^3x^2)\,dx - (v^2x^3\,dv) = 0$$

$$x^2(1 + v + v^3)\,dx - v^2x^3\,dv = 0$$

جداسازی $\rightarrow \dfrac{dx}{x} - \dfrac{v^2}{1+v+v^3}\,dv = 0$

$$\longrightarrow \ln|x| + \int \frac{v^2}{1+v+v^3}\,dv = c$$

$\rightarrow \sin\frac{x}{y}\,dx - dy = 0$

معادله همگن است از مرتبه ۰.

(به چه شرطی همگن بودن را بررسی اش را ننوشتی.)

فرض $\Rightarrow y = vx \longrightarrow dy = v\,dx + dv\,x$

$$\sin\frac{x}{vx}\,dx - v\,dx - x\,dv = 0$$

$$\sin\frac{1}{v}\,dx - v\,dx - x\,dv = 0$$

$$\left(\sin\frac{1}{v} - v\right)dx - x\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{\sin\frac{1}{v} - v} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{1}{f_{in}\frac{1}{v} - v}\, dv = \int 0\, dx$$

+ قرار دادن c در حل‌های Ln واجب است.

$$\ln|x| - \int \frac{1}{f_{in}\frac{1}{v} - v}\, dv = c$$

۱۷ $(y^2 - 2xy)\,dx + 2x^2\,dy = 0$

معادله همگن است از درجه 2.

$$y = vx \longrightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

$$(v^2x^2 - 2x^2v)\,dx + 2x^2(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(v^2 - 2v)x^2\,dx + 2x^2v\,dx + 2x^3\,dv = 0$$

$$(v^2 \cancel{-2v} \cancel{+2v})\,x^2\,dx + 2x^3\,dv = 0$$

$$v^2x^2\,dx + 2x^3\,dv = 0$$

$$\int \left(\frac{1}{2x}\,dx + \frac{1}{v^2}\,dv = 0 \right)$$ جدا پذیری.

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{v} = c}$$

نکته. باید بعد از حل معادله مقدار ν بجای ν مقدار $\frac{y}{x}$ قرار داده شود.

معادله دیفرانسیل مرتبه اول کامل - معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

را کامل گوییم هر گاه عبارت زیر برقرار باشد.

$$\boxed{\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}}$$

مثال: $(\underbrace{5x^3 - 2y^2}_{M})\,dx + (\underbrace{3y - 4xy}_{N})\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta M}{\delta y} = -4y \\[2ex] \dfrac{\delta N}{\delta x} = -4y \end{array}\right\rangle \quad \frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$$

$\Rightarrow$ معادله دیفرانسیل کامل مرتبه اول است.

مثال: $(\underbrace{ye^{xy} - 4x^3}_{M})\,dx + \underbrace{xe^{xy}}_{N}\,dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta M}{\delta y} = e^{xy} + xye^{xy} \\[2ex] \dfrac{\delta N}{\delta x} = e^{xy} + yxe^{xy} \end{array}\right\rangle$$

برابرند $\longrightarrow$ معادله کامل دیفرانسیل مرتبه اول است.

Year. Month. Date. ( )

$F(x,y)=c$

F_{xy} F_{yx} F

$$\frac{\delta M}{\delta y}=\frac{\delta N}{\delta x}$$

حل معادلات دیفرانسیل کامل -

فرض میکنیم جواب تابع $F(x,y)=c$ است.

در این صورت برای حل معادلات دیفرانسیل کامل

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

① ابتدا از M نسبت به x انتگرال میگیریم فرض میکنیم ثابت انتگرال (c) در این

حالت تابعی از y مثل $g(y)$ باشد. (این تابع F است.)

② چون مشتق F نسبت به y برابر N باشد پس با قرار دادن $g(y)$ پیدا میشود.

③ جایگذاری g در F جواب به صورت

$F(x,y)=c$ داده میشود.

$$(5x^3-2y^2)\,dx+(3y-4xy)\,dy=0$$

① $\int_x F=M \rightarrow \int(5x^3-2y^2)\,dx=\frac{5}{4}x^4-2y^2x+g(y)$

② $F_y=N \rightarrow \cancel{-4xy}+g'(y)=3y\cancel{-4xy}$

$$g'(y)=3y \xrightarrow{\text{انتگرال}} g(y)=\frac{3}{2}y^2$$

BERKEH

جواب $\Rightarrow \frac{5}{4}x^4-2y^2x+\frac{3}{2}y^2$

$$(\underbrace{y e^{xy} - 4x^3}_{M})\,dx + \underbrace{x e^{xy}}_{N}\,dy = 0$$

بعد از بررسی شرط بودن وضعیت پیوستگی ← کامل

$$F(x,y) = \int_x M\,dx \rightarrow e^{xy} - x^4 + g(y)$$

$$F_y = N \rightarrow \cancel{x e^{xy}} + g'(y) = \cancel{x e^{xy}}$$

$$g'(y) = 0 \longrightarrow g(y) = c$$

جواب کلی $\rightarrow e^{xy} - x^4 + c$

$$(2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy - y)\,dy = 0$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 2x + 2y$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} = 2x + 2y^2$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x} \Rightarrow$$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول کامل

فرض کنیم: $F(x,y) = c$

$$F(x,y) = \int M\,dx = \int (2xy + y^2)\,dx = x^2y + y^2x + g(y)$$

$$F'_y = N \rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{2yx} + g'(y) = \cancel{x^2} + \cancel{2xy} - y$$

$$g'(y) = -y \longrightarrow g(y) = \frac{-y^2}{2}$$

جواب کلی $\rightarrow x^2y + y^2x - y^2/2$

جلسه سوم

۴۷ نوع جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل به تعداد مرتبه معادله ثابت دلخواه خواهد داشت؟

مثال $y\,dx + (x^{\cancel{2}} + y^2)\,dy = 0$

جدایی‌پذیر $\rightarrow \times$

همگن $\rightarrow$ درجه ۱ $\neq$ درجه ۲ $\rightarrow \times$

کامل $\rightarrow 1 = \frac{\partial M}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \rightarrow \checkmark$

حل به روش معادله کامل ←

فرض $F(x,y) = c \rightarrow$ جواب باشد

$$F(x,y) = \int M\,dx = yx + g(y)$$

باید $F_y = N \rightarrow x + g'(y) = x + y^2 \rightarrow g'(y) = y^2$

$$g(y) = \frac{y^3}{3} + c_1 \quad \checkmark$$

جواب $\Rightarrow \quad yx + \frac{y^3}{3} + c_1 = c$

۴۸ ثابت کنید هر معادله دیفرانسیل جدایی‌پذیر، کامل است:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \xrightarrow{\text{جدایی‌پذیر}} M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\text{کامل}}$ ، کامل است ، $\checkmark$

BERKEH

نکته: به ازای هر معادله دیفرانسیل مرتبه یک تابع $R(x,y)$ وجود دارد که در ضرب آن در طرفین معادله، معادله تبدیل به یک معادله کامل می‌شود.

به تابع R عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل گفته می‌شود.

نکات مهم:

① عامل انتگرال ساز منحصر به فرد نیست (مقدار بی‌شمار) یا (تعداد بیشمار)

قضیه ـ اگر $R(x,y)$ عامل انتگرال ساز معادله $F(y',y,x)$ باشد آن گاه ضرایبی از R وجود دارند که عامل انتگرال ساز معادله هستند.

② عامل انتگرال ساز می‌تواند تابعی از x یا y یا هر دو باشد.

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی:

معادله مرتبه اول $F(y',y,x)=0$ را معادله خطی گویند هرگاه بتوان معادله را به صورت $y'+p(x)y=q(x)$ نوشت.

مثال: $y'+2xy=x^2 \rightarrow$ معادله خطی است

ضرب عامل انتگرال ساز در معادله ← $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$ عامل انتگرال ساز

نکته: بیشترین توان تابع و مشتق آن در معادلات خطی برابر یک است.
یعنی شکل کلی معادله خطی مرتبه اول بصورت ضریبی از تابع x در y' و معادله ضریبی از تابع x در y برابر تابع x است.

$e^{x^2}y' + 2e^{x^2}xy = e^{x^2}.x^2$

$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = x^2e^{x^2} \xrightarrow{\times dx}$

$e^{x^2}dy + 2xe^{x^2}y\,dx = x^2e^{x^2}dx$

شرط کامل $\rightarrow \frac{\delta e^{x^2}}{\delta x} = \frac{\delta(2xe^{x^2}y - x^2e^{x^2})}{\delta y} = 2xe^{x^2}$

حل معادلات خطی:

① بدیهی است که معادله خطی مرتبه اول با استفاده از عامل انتگرال ساز و تبدیل معادله خطی به معادله کامل حل می‌شود.

← فرمول عامل انتگرال ساز $y'+p(x)y=q(x)$ برابر $e^{\int p(x)dx}$ است.

* برای حل معادله خطی مرتبه ۱

$y'+p(x)y=q(x)$

① عامل انتگرال ساز را حساب می‌کنیم.

② با ضرب عامل انتگرال ساز در معادله، به معادله کامل می‌رسیم.

③ معادله کامل را با روش عادی حل می‌کنیم.

ادامه حل $\rightarrow e^{x^2}dy + (2xe^{x^2}y - x^2e^{x^2})dx = 0$

فرض می‌کنیم $\rightarrow F(x,y)=c$ جواب

$F(x,y)=\int x\,dx =$ ؟ حل سؤال را به آخر ببرید.

① $\int (2xye^{x^2} + x^2e^{x^2})\,dx =$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du \;\longrightarrow\; u = y\,,\; dv = 2xe^{x^2}$

$ye^{x^2} - \int$

$\Rightarrow\; 3xy' - e^{x}y = 0$

$y' - \dfrac{e^{x}}{3x}\,y = 0$ (حل سوال با ضرب طرفین)

$e^{\int \frac{e^{x}}{3x}dx}$ $\longrightarrow$?

$\Rightarrow\; 3xy' + x^5y = 2x^2$

$y' + \dfrac{x^5}{3x}\,y = \dfrac{2x}{3}$ معادله خطی است

عامل انتگرال، $e^{\int \frac{x^4}{3}dx} = e^{x^5/15}$

$\xrightarrow{\text{عامل انتگرال ضرب میکنیم}}\; e^{x^5/15}\underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} + e^{x^5/15}\cdot\dfrac{x^4}{3}\,y = \dfrac{2}{3}x\cdot e^{x^5/15}$

$e^{x^5/15}\,dy + e^{x^5/15}\cdot\dfrac{x^4}{3}\,y\,dx = \dfrac{2}{3}x\cdot e^{x^5/15}\,dx$

$e^{x^5/15}\,dy + \dfrac{1}{3}e^{x^5/15}\cdot x\,(x^3y - 2)\,dx = 0$

$$\frac{\delta M}{\delta x} = \frac{5x^4}{15} \cdot e^{x^5/15}$$

$$\frac{\delta N}{\delta y} = \frac{x^4}{3} \cdot e^{x^5/15}$$

ش ۱ برقرار → ش ۱ معادله کامل

$$e^{2x} y' - 2e^{2x} y = e^{4x}$$

$$y' - 2y = e^{2x} \longrightarrow$$ ش ۱ معادله خطی

عامل انتگرال $\mu = e^{\int -2dx} = e^{-2x} \xrightarrow{\int \times \text{معادله}}$

$$e^{-2x} y' - 2e^{-2x} y = 1$$

$$\xrightarrow[\times dx]{y' = \frac{dy}{dx}} e^{-2x} dy - 2e^{-2x} y\, dx = dx$$

$$\underbrace{e^{-2x}}_{N} dy - \underbrace{(2e^{-2x} y + 1)}_{M} dx = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2e^{-2x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2e^{-2x}$$

ش ۱ معادله کامل $\frac{\delta M}{\delta x} = \frac{\delta N}{\delta y}$

فرض میکنیم $F(x,y) = c$

BERKEH $F(x,y) = \int M dx = +y e^{-2x} - x + g(y)$

Year. Month. Date. ( )

$F_y \overset{\text{برابر}}{=\!=} N \longrightarrow -e^{-2x} + g'(y) = N = e^{-2x}$

$g'(y) = 0 \longrightarrow g(y) = C$

جواب $\longrightarrow \; y e^{-2x} + x = C$

مثال $\;x^3 y' - 2xy = 7x^6$

$y' - \dfrac{2}{x^2} y = 7x^3 \longrightarrow$ معادله خطی است

عامل انتگرال ساز $\;\rho = e^{\int \frac{-2}{x^2}} = e^{\int -2x^{-2}} = e^{\frac{2}{x}}$

ρ . ضرب $\longrightarrow e^{\frac{2}{x}} y' - \dfrac{2e^{2/x}}{x^2} y = 7x^3 . e^{\frac{2}{x}}$

$\longrightarrow e^{2/x} dy - \left(\dfrac{2}{x^2} e^{2/x} y + 7x^3 e^{2/x}\right) dx = 0$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{2}{x^2} e^{2/x} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{-2}{x^2} e^{2/x} \end{array}\right\}$ شرط کامل: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

فرض: $F(x,y) = C$ جواب

$\int M \, dx$

تمرین ...

رحیمی

Year. Month. Date. ( )

نکته ۱: روش جزء به جزء $\int f(x)g(x)\,dx$ به این صورت است:

(1) یک قسمت انتگرال گرفتنش راحت‌تر است ← $dv = g(x)\,dx$

(2) یک قسمت مشتق گرفتن از آن آسان‌تر است ← $u = f(x)$

$$\begin{cases} u = f(x) \rightarrow du = f'(x)\,dx \\ dv = g(x)\,dx \rightarrow v = \int g(x)\,dx \end{cases}$$

$$(uv)'\,dx = u'v\,dx + v'u\,dx$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\rightarrow u\,dv = d(uv) - v\,du$$

$$\rightarrow \int u\,dv = \int d\,uv - \int v\,du$$

$$\rightarrow \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

نکته. اگر تابع $\mu(x,y)$ عامل انتگرال ساز معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

باشد آنگاه همواره داریم:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

سوال: تحت چه شرایطی عامل انتگرال ساز معادله

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

تنها تابعی از x است؟

هرگاه μ عامل انتگرال ساز باشد داریم:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

اگر μ تنها تابعی از x باشد داریم

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

پس:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

تابع از x است

+ پس با توجه به اینکه در سمت چپ معادله تابعی از x است پس سمت راست هم باید تابعی فقط از x باشد.

Year. Month. Date. ( )

پس میتوانیم عامل انتگرال ساز مانند (P) تنها تابعی از x است هرگاه

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$ تابعی از x باشد.

به همین ترتیب عامل انتگرال ساز میتواند توابعی از y و xy و ... باشد.

شرایط لازم را بیابید.

Year. Month. Date. ( )

معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه

برای معادله دیفرانسیل $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x)$

گاهی شرایط اولیه

$$\boxed{n \text{ شرط}}\begin{cases} y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

داده می‌شود.

در این صورت با به کارگیری n شرط های اولیه پس از محاسبه جواب عمومی دستگاه باید جواب خصوصی از بین بی شمار جواب عمومی بدست می‌آوریم.

$$\text{مثال}\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

روش اول ←

عامل انتگرال‌ساز: $e^{\int -P(x)dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$

$\xrightarrow{\text{معادله} \times \text{عامل}}$ $e^{-x}dy - e^{-x}y\,dx = 0$

جداسازی ← $dy/y - dx = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال}}$

$\ln|y| - x = C \longrightarrow e^{\ln|y| - x} = e^{C}$

$\dfrac{e^{\ln|y|}}{e^{x}} = e^{C} \rightarrow y = e^{x+C}$ ← جواب عمومی

$y(0) = 1 \rightarrow 1 = e^{C} \rightarrow C = 0 \Longrightarrow y = e^{x}$ جواب خصوصی

$$e^{\ln u} = u$$

$$\ln e^{u} = u$$

نکته ←

← حل کلیه معادلات دیفرانسیل و حل و به عهده دانشجوست.

معادله مرتبه دوم قابل تبدیل به مرتبه اول -

① معادلات به حذف y' $\qquad F(y'', y, x) = 0$

② معادلات به حذف y $\qquad F(y'', y', x) = 0$

دو دسته

در هر دو حالت قرار میدهیم به ازای $y' = p(x)$ پس داریم $y'' = p'(x)$

و به معادله‌ای که حل می‌شود (برحسب P)

مثال $y'' + y' = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} p' + p = 0$ مرتبه ۱ و خطی

$$y' = p \rightarrow y'' = p'$$

[illegible] حل شده به معادله دوم

Year. Month. Date. ( )

جلسه چهارم.

معادله برنولی - معادله مرتبه اول به فرم روبرو است. $y' + p(x)y = y^n q(x)$

برای حل معادله برنولی ① ابتدا کل معادله را بر y^n تقسیم میکنیم.

② تغییر متغیر میدهیم. $z = y^{1-n} \Rightarrow dz = (1-n)y^{-n}dy$

③ جایگذاری میکنیم در معادله تا یک معادله خطی برحسب z و x بدست آید.

$$\text{Ex} \quad y' + xy = \frac{x}{y^3}$$

مرحله اول. $n=-3 \xrightarrow{\div y^{-3}}$ حل، $y^3 y' + xy^4 = x$

مرحله دوم. $z = y^4 \Rightarrow dz = 4y^3 dy \; ; \; dy = \frac{dz}{4y^3}$

مرحله سوم. $y^3 \frac{dy}{dx} + xy^4 = x$

جایگذاری $\Rightarrow \cancel{y^3} \frac{dz}{4\cancel{y^3} dx} + xz = x$

$$\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} + xz = x \Rightarrow \frac{1}{4}z' + xz = x$$

$\boxed{z' + 4xz = 4x} \rightarrow$ معادله خطی است

ادامه حل ...

Year. Month. Date. ( )

$$۷ \triangleright \; \frac{dx}{dy} + 2xy = e^{-y^2}$$

$$۱ + \left(2xy - e^{-y^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow \text{خطی}$$

عامل انتگرال $\longrightarrow$ ...

Year. Month. Date. ( )

ه) $(1-x^3)\dfrac{dy}{dx} - 2(1+x)y = \sqrt{y^5}$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2(1+x)}{(1-x^3)}y = \frac{y^{5/2}}{1-x^3} \qquad n = \frac{5}{2}$$

$$\div y^{5/2} \longrightarrow \frac{dy}{y^{5/2}\,dx} - \frac{2(1+x)}{(1-x^3)}y^{-3/2} = \frac{1}{1-x^3}$$ معادله اصلی

تغییر متغیر $z = y^{1-n} \longrightarrow z = y^{-3/2} \longrightarrow dz = \frac{-3}{2}y^{-5/2}dy$

$$dy = \frac{-2}{3}y^{5/2}dz$$

جایگذاری $\longrightarrow \dfrac{-2/3\, y^{\frac{5}{2}}dz}{y^{5/2}\,dx} - \dfrac{2(1+x)}{(1-x^3)}z = \dfrac{1}{1-x^3}$ ۱. معادله خطی

ادامه حل ---

Year. Month. Date. ( )

فصل دوم.

معادله خطی مرتبه n — معادله خطی از درجه $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, x) = 0$ را خطی گویند هرگاه توان هر مشتق y از هر مرتبه برابر یک شده و کل معادله ترکیبی خطی از مشتقات y ضرب در توابعی از x باشد.

فرم کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n بصورت زیر خواهد بود:

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

این معادله را بصورت $Ly = f(x)$ هم نشان میدهند.

به اختصار می‌نویسیم: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f$

- اگر تابع $f(x)$ برابر صفر باشد به معادله خطی همگن گفته می‌شود.
پس $Ly = 0$ معادله خطی همگن است.

- منظور از حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n محاسبه ضابطه y با n پارامتر مختلف است که در معادله صدق میکند.

از این به بعد جواب‌های معادله همگن را ($Ly = 0$) با y_h نشان میدهیم.

جواب خصوصی معادله $Ly = F$ را با y_p نشان میدهیم.

قرارداد: از این به بعد $\frac{dy}{dx} = Dy$

$\vdots$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = D^2y$$

$\vdots$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

با این ترتیب شکل معادله

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R$$

به صورت عملگری D به فرم زیر خواهد بود:

$$Ly = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_1 D y + a_0 \cancel{D} y = R$$

$$\Rightarrow Ly = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)\, y = R$$

به همین ترتیب عملگر D را به عنوان مشتق می‌توان روی توابع اعمال کرد:

$\Rightarrow$ Ex. $(D^2+5)\cos x = -\cos x + 5\cos x = 4\cos x$

$\Rightarrow$ $(D^3+D^2-4D+3)(x^2+5) = 0 + 2 - 8x + 3 = 5 - 8x$

Year. Month. Date. ( )

تعریف معادله مشخصه معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n :

راحتی است به جای هر عملگر D ، عدد حقیقی r را قرار دهیم . یک معادله درجه n برحسب r ساخته

می‌شود که به آن معادله مشخصه یا عملی معادله خطی است .

معمولاً معادله مشخصه هنگامی به کار می‌رود که ضرایب a_i عددی و f دارای مقدار ... باشد .

مثال : معادله مشخصه معادلات زیر را بنویسید .

مثال $4y''' + 3y'' - 25y = 0$

$$Ly = (4D^3 + 3D^2 - 25)y = 0$$

معادله عملی $\rightarrow 4r^3 + 3r^2 - 25 = 0$

مثال $25y^{(7)} - y''' = y^{(4)}$

$$Ly = (25D^7 - D^4 - D^3)y = 0$$

معادله عملی $\rightarrow 25r^7 - r^4 - r^3 = 0$

خواص فرم خطی : فرض کنیم y_1 و y_2 دو تابع حداقل n بار مشتق‌پذیر باشند .

در این صورت اگر $c \in \mathbb{R}$ ، داریم :

① $cLy_1 = L(cy_1)$

② $L(y_1+y_2) = Ly_1 + Ly_2$

قضیه - فرض کنیم $y_1, y_2, \ldots, y_n$ جوابهای خصوصی معادله خطی همگن $Ly=0$ باشند در این صورت هر ترکیب خطی از این جوابها هم جواب معادله همگن است.

یعنی $y_h = c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ جواب عمومی معادله همگن.

قضیه - فرض کنید y_p یک جواب خصوصی معادله $Ly=f$ باشد و y_h جواب عمومی معادله همگن نظیر آن $(Ly=0)$.

در این صورت جواب عمومی معادله $Ly=f$ برابر با $y=y_h+y_p$ خواهد بود.

پس: جواب هر معادله خطی بصورت y_p+y_h است که در آن y_p جواب خصوصی معادله و y_h جواب عمومی معادله همگن است.

هدف: ۱) حل معادله همگن نظیر $\leftarrow y_h$

۲) یافتن یک جواب خصوصی y_p

۳) جمع دو جواب.

روش حل معادلات همگن :

① ابتدا فرم عمومی معادله را می‌نویسیم .

② معادله مشخصه را بدست می‌آوریم . تجزیه می‌کنیم و ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم

۱-۲ . حالت اول - معادله دارای n ریشه مجزا باشد $r_1, \dots, r_n$

دارای صورت جواب $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$

پس جواب عمومی معادله همگن

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

۲-۲ اگر ریشه تکراری معادله باشد به ازای هر بار تکرار یک بار x را در جواب ضرب می‌کنیم . مثلاً اگر جواب r دو بار تکرار شده باشد $\rightarrow$ $c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

مثلاً برای 3 بار تکرار r $\rightarrow$ $c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + c_3 x^2 e^{rx}$

۳-۲ اگر ریشه‌ها غیر حقیقی باشند مثلاً $r = a + bi$

$c_1 e^{rx}$

$c_1 e^{(a+bi)x}$

$= c_1 e^{ax} \cdot e^{bix}$

Year. Month. Date. ( )

خواهید.

$\Rightarrow y'' - 4y' + 3y = 0$

$$Ly = (D^2 - 4D + 3)y = 0$$

$r^2 - 4r + 3 = 0 \leftarrow$ معادله مشخصه

$(r-3)(r-1) = 0 \rightarrow r = 1 \rightarrow e^{x}$, $\quad r = 3 \rightarrow e^{3x}$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}}$$

معادله از مرتبه 2 است پس باید 2 پارامتر هم داشته باشد.

$\Rightarrow y'' - 2y' + y = 0$

$$Ly = (D^2 - 2D + 1)y = 0$$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \longrightarrow$ معادله مشخصه

$(r-1)^2 = 0 \longrightarrow r = 1$ ریشه مضاعف

$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}.$$

$\Rightarrow 6y'' - 11y' + 4y = 0$

$$Ly = (6D^2 - 11D + 4)y = 0$$

$6r^2 - 11r + 4 = 0 \longrightarrow$ معادله مشخصه

$\Delta = 25 \rightarrow r = \frac{11 \pm 5}{12} = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

$$y_h = c_1 e^{\frac{4}{3}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

Year. Month. Date. ( )

$y^{(4)} - a^2 y = 0$

$Ly = (D^4 - a^2)y = 0$

$r^4 - a^2 = 0$ معادله مشخصه

$(r^2 - a)(r^2 + a) = 0 \rightarrow r = \pm\sqrt{a}\ ,\ r = \pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}\, i$

$y_h = c_1 e^{\sqrt{a}x} + c_2 e^{-\sqrt{a}x} + c_3 e^{\sqrt{a}ix} + c_4 e^{-\sqrt{a}ix}$

$y_h = c_1 e^{\sqrt{a}x} + c_2 e^{-\sqrt{a}x} + c_3(\cos\sqrt{a}x + i\sin\sqrt{a}x) + c_4(\cos\sqrt{a}x - i\sin\sqrt{a}x)$

$y^{(4)} - 4y'' = 0$

$Ly = (D^4 - 4D^2)y = 0$

معادله مشخصه $\rightarrow r^4 - 4r^2 = 0 \Rightarrow r = 0$ مکرر

$r = \pm 2$

$y_h = c_1 \overset{1}{\cancel{e^{0}}} + c_2 x \overset{1}{\cancel{e^{0}}} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x}$

$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$

$Ly = (D^3 - 4D^2 + D + 6)y = 0$

معادله مشخصه $\rightarrow r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$

برای تجزیه‌های بیش از درجه 2

راه حل ارائه دهید

BERKEH

ex) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$

$Ly = (D^5 + 2D^3 + 1)y = 0$

مشخصه $\to$ $r^5 + 2r^3 + 1 = 0$

$r^5 + r^3 + r^3 + r = r^3(r^2+1) + r(r^2+1) = 0$

$(r^2+1)(r^3+r) =$ حل ادامه

Year. Month. Date. ( )

جلسه نهم .

$\Rightarrow y'' - 4y' + 4y = 0$

$$Ly = (D^2 - 4D + 4)y = 0$$

معادله مشخصه $\Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2$

$$\Rightarrow y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$Ly = f$ $\quad$ y_p جواب خصوصی است.

محاسبه y_p –

① روش تغییر متغیر، همواره جواب میدهد. (توضیحاتش را نوشتیم و بیان کردیم.)

② روش ضرایب نامعین: معادله به شرطی که F یا مشتقاتش x^n، ... ، سینوس و کسینوس باشد.

" از این جهت به بعد روش تدریس استاد با کتاب متفاوت است. "

۱- روش تغییر متغیر: در این روش پس از حل معادله همگن و یافتن جواب‌های y_1 و y_2

فرض میکنیم جواب خصوصی y_p به شکل $y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$ باشد که در آن

v_1 و v_2 توابعی از x هستند. پس به قاعده کلی کرامر داریم:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ f(x) & u_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}}$$

Year. Month. Date. ( )

با استدلال گیری و محاسبه V_1 و V_2 اینها را در جواب جایگذاری می‌کنیم.

- برای حل دستگاه به روش کرامر:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = p \\ cx_2 + dy_2 = q \end{cases} \qquad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را به روش اول حل کنید.

$$y'' - 4y' + 3y = 9$$

فرض: $y = y_h + y_p$

محاسبه y_h → $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$Ly = (D^2 - 4D + 3)y = 0$$

معادله مشخصه → $r^2 - 4r + 3 = 0 \longrightarrow (r=1 \text{ یا } r=3)$

$$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$

محاسبه y_p از روش تغییر پارامتر:

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 = v_1 e^{x} + v_2 e^{3x}$$

به روش کرامر داریم: $v_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ h(x) & u_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 9 & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{3x} \\ e^{x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \dfrac{-9e^{3x}}{3e^{4x} - e^{4x}}$

$$v_1 = \int v_1' \, dx = -\frac{9}{2} \int e^{-x} \, dx = \frac{9}{2} e^{-x}$$

Year. Month. Date. ( )

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{9e^x}{2e^{4x}} = \frac{9}{2} e^{-3x}$$

$$v_2 = \int v_2' \, dx = \frac{9}{2} \times \frac{-1}{3} e^{-3x} = \frac{-3}{2} e^{-3x}$$

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 = \frac{9}{2} e^{-x} \cdot e^x - \frac{3}{2} e^{-3x} \cdot e^{3x} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$$

$$y = y_h + y_p \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + 3}$$

سوال: حل کنید.

$$y'' - 8y' + 7y = 2$$

فرض میکنیم $y = y_h + y_p$ ←

① محاسبه y_h : نوشتن معادله همگن متناظر.

$$y'' - 8y' + 7y = 0$$

$$\rightarrow Ly = (D^2 - 8D + 7)y = 0$$

معادله مشخصه ← $r^2 - 8r + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 7 \\ r = 1 \end{cases}$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{7x} + c_2 e^x}$$

② محاسبه y_p به روش تغییر پارامتر:

فرض میکنیم:

$$y_p = v_1 e^{7x} + v_2 e^x$$

بقیه روش لاگرانژ :

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ 2 & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{7x} & e^x \\ 7x^{7x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-2e^x}{e^{8x} - 7e^{8x}} = \frac{1}{3} e^{-7x}$$

$$v_1 = \int v_1' \, dx = \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{7}\right) e^{-7x} = \boxed{\frac{-1}{21} e^{-7x}}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{7x} & 0 \\ 7e^{7x} & 2 \end{vmatrix}}{-6e^{8x}} = \frac{2e^{7x}}{-6e^{8x}} = \frac{-1}{3} e^{-x}$$

$$v_2 = \int v_2' \, dx = \boxed{\frac{1}{3} e^{-x}}$$

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

$$= \frac{1}{21} e^{-7x} \cdot e^{7x} + \left(\frac{-1}{3} e^{-x}\right) \cdot e^x = \frac{1}{21} - \frac{1}{3} = \frac{-6}{21}$$

جواب نهایی : $y = y_h + y_p \Longrightarrow \boxed{c_1 e^{7x} + c_2 e^x - \frac{6}{21}}$

$$y'' - 8y' + 7y = e^x$$
حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $y = y_p + y_h$

$$Ly = (D^2 - 8D + 7)y = 0$$

معادله مشخصه $r^2 - 8r + 7 = 0 \longrightarrow \begin{cases} r = 7 \\ r = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_h = c_1 e^{7x} + c_2 e^x}$

$$y = y_h + y_p$$

Year. Month. Date. ( )

$y_p = v_1 e^{7x} + v_2 e^{x}$ حال به y_p به روش تغییر پارامتر

به روش کرامر

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ e^{x} & e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{7x} & e^{x} \\ 7e^{7x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}}{e^{8x} - 7e^{8x}} = \frac{1}{6} e^{-6x}$$

$$v_1 = \int v_1' \, dx = \boxed{\frac{-1}{36} e^{-6x}}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{7x} & 0 \\ 7e^{7x} & e^{x} \end{vmatrix}}{-6e^{8x}} = \frac{-1}{6}$$

$$v_2 = \int v_2' \, dx = \boxed{\frac{-1}{6} x}$$

$$y_p = \frac{-1}{36} e^{-6x} \cdot e^{7x} + \frac{-1}{6} x \cdot e^{x} = \frac{-1}{36} e^{x} - \frac{1}{6} x e^{x}$$

جواب کلی $y = y_h + y_p \Rightarrow c_1 e^{7x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{36} e^{x} - \frac{1}{6} e^{x}$

مثال: حل کنید.

$$2y'' - 8y' + 8y = \sin 2x$$

فرض کنید: $y = y_h + y_p$

y_h تعیین: $Ly = (2D^2 - 8D + 8)y = 0$

معادله مشخصه $\rightarrow$ $2r^2 - 8r + 8 = 0 \rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$

$r = 2, r = 2$

BERKEH

$$\boxed{y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}}$$

حل y_p به روش تغییر پارامتر:

فرض: $y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$

$$y_p = v_1 e^{2x} + v_2 x e^{2x}$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{2x} \\ \sin 2x & 2x e^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix}}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \end{vmatrix}}{\begin{matrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{matrix}}$$

ادامه حل نبوده است.

② حل y_p به روش ضرایب نامعین: $(Ly = f)$

در این روش با توجه به نوع تابع f به جای y_p مقادیری با ضرایب نامعین A و β و ...

با توجه به جداول روبرو قرار می‌دهیم.

y_p را در معادله صدق می‌دهیم. به جای قرار دادن ضرایب A, B, C ...

معلوم می‌شود. با جایگذاری معادله حل می‌شود.

اگر تابع f به کدام یک از صورت‌های زیر باشد.	وابسته	آن گاه جواب خاص به صورت ... را امتحان می‌کنیم
① e^{rx}	r ریشه معادله مشخصه نباشد.	Ae^{rx}
	r ریشه ساده معادله مشخصه باشد.	Axe^{rx}
	r ریشه مضاعف " " .	Ax^2e^{rx}
② $\cos kx$ یا $\sin kx$	ki ریشه معادله مشخصه نباشد	$A\sin kx + B\cos kx$
③ ax^2+bx+c	0 ریشه معادله مشخصه نباشد.	Dx^2+Ex+F
	0 ریشه ساده " باشد.	Dx^3+Ex^2+Fx
	0 ریشه مضاعف " .	$Dx^4+Ex^3+Fx^2$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش ضرایب نامعین حل کنید.

$$y''-5y'+4y=\sin x$$

فرض: $y=y_p+y_h$

$$Ly=0 \longrightarrow y''-5y'+4y=0 \Rightarrow (D^2-5D+4)y=0$$

معادله مشخصه $\longrightarrow r^2-5r+4=0 \longrightarrow \begin{cases} r=4 \\ r=1 \end{cases}$

$$\boxed{y_h=c_1e^{4x}+c_2e^{x}}$$

محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین :

$$y_p = A\sin x + B\cos x$$

y_p در معادله صدق است ـــ σ_2

$$y_p' = A\cos x - B\sin x$$

$$y_p'' = -A\sin x - B\cos x$$

جایگذاری در معادله :

$$-A\sin x - B\cos x - 5A\cos x + 5B\sin x + 4B\cos x - \sin x$$

$$(3A+5B)\sin x + (3B-5A)\cos x = \sin x$$

$$\begin{array}{l} \times 5 \\ \times 3 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 3A+5B=1 \\ 3B-5A=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 15A+25B=5 \\ 9B-15A=0 \end{array}\right.$$

$$34B=5 \to B=\frac{5}{34}$$

$$A=\frac{3}{34}$$

$$\sigma_2: \quad y_p = \frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34}\cos x$$

$$y = y_h + y_p \Rightarrow y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{x} + \frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34}\cos x$$

حل کنید.

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{2x}$$

فرض : $y = y_h + y_p$

$$Ly = 0 \to (D^2 - 6D + 9)y = 0$$

معادله مشخصه $\to r^2 - 6r + 9 = 0 \to r = 3$ مضاعف

$$\boxed{y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} x}$$

محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین :

جدول ← ریشه مضاعف نیست نه ریشه معادله مشخصه .

$$y_p = Ae^{2x} \rightarrow y'_p = 2Ae^{2x} \rightarrow y''_p = 4Ae^{2x}$$

$$4Ae^{2x} - 12Ae^{2x} + 9Ae^{2x} = 5e^{2x}$$

$$Ae^{2x} = 5e^{2x} \rightarrow A=5 \rightarrow \boxed{y_p = 5e^{2x}}$$

$$y = y_h + y_p \rightarrow \boxed{c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} x + 5e^{2x}}$$

نکته . اگر تابع f مجموعی از حالت‌های جدول زیر باشد باید طبق حالت‌های جدول

صفحه را حل با توجه به آنها مجموع تمام این حالت‌ها را در نظر میگیریم .

Year. Month. Date. ( )

استقلال خطی و وابستگی خطی مجموعه‌ها :

تعریف : مجموعه متناهی $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ را مستقل خطی می‌نامند هرگاه هر ترکیب خطی از ضرایب حقیقی آن یعنی $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\dots+c_nx_n=0$ نتیجه می‌دهد $c_1=c_2=c_3=\dots=c_n=0$

مجموعه‌ای که مستقل خطی نباشد را وابسته خطی می‌نامند.

نکته : دراین هر مجموعه 2 عضوی وابستگی خطی به معنی این است که یکی از دو عضو مضربی از دیگری است.

مثلا مجموعه بردار $\{(1,0)\ (0,1)\}$ مستقل خطی است.

$$c_1(1,0)+c_2(0,1)=(0,0)$$
$$(c_1,0)+(0,c_2)=(0,0) \rightarrow c_1=c_2=0$$

اما مجموعه بردار $\{(1,0)\ (0,1)\ (3,9)\}$ وابسته خطی است.

$$3(1,0)+9(0,1)=(3,9)$$

+ هر مجموعه‌ای از اعداد که درونش صفر باشد وابسته است.

Year. Month. Date. ( )

تعریف ورونسکین wronskinien : یک مجموعه از توابع.

فرض کنیم $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ یک مجموعه از توابع با n عضو باشد در این صورت

ورونسکین مجموعه V را بصورت

$$W(V) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_n \\ u''_1 & u''_2 & \cdots & u''_n \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه: هرگاه $W(U) \not\equiv 0$ آنگاه مجموعه U مستقل خطی است ولی اگر همواره صفر باشد U وابسته خطی است.

نشان دهید $\{e^x, \sin x\}$ مستقل خطی است.

$$W(U) = \begin{vmatrix} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix} = e^x(\cos x - \sin x) \not\equiv 0$$

مجموعه U مستقل خطی است.

آیا مجموعه $\{2x, 3x^2, \cos x\}$ ؟

$$W(U) = \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 & \cos x \\ 2 & 6x & -\sin x \\ 0 & 6 & -\cos x \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

مستقل خطی است.

مثال $\{2x, 3x^2, 5x^2\}$ ؟

$$W(x) = \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 & 5x^2 \\ 2 & 6x & 10x \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

وابسته خطی است.

حسابان :

فصل ۳ درس ۳ :

فرض کنیم $m, n \in \mathbb{N}$ و فرض $m<n$ تعریف می‌کنیم

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$$

خواص Σ :

خطی ① ضریب ثابت نسبت به i از Σ بیرون می‌آید.

$$c\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=m}^{n} c f(i)$$

② Σ قابل شکست است، فرض $m<k<n$

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=m}^{k} f(i) + \sum_{i=k+1}^{n} f(i)$$

Year. Month. Date. ( )

نکته ۰
$$\sum_{i=m}^{n}\big(h(i)+g(i)\big)=\sum_{i=m}^{n}h(i)+\sum_{i=m}^{n}g(i)$$

- دو نوع تفکیک جمله داریم ← تفکیک یک جمله به تنهایی
← تغییر محدوده اندیس.

① تفکیک یک جمله تنهایی :

$$\sum_{i=m}^{n}h(i)=h(m)+\sum_{i=m+1}^{n}h(i)$$

جمله اول
$$=h(m)+h(m+1)+\sum_{i=m+2}^{n}h(i)$$
$$\vdots$$

جمله آخر
$$\sum_{i=m}^{n}h(i)=\sum_{i=m}^{n-1}h(i)+h(n)$$

ex
$$\sum_{i=4}^{19}i^2=16+25+\sum_{i=6}^{19}i^2$$
$$=16+\sum_{i=5}^{18}i^2+19^2$$
$$=\sum_{i=4}^{7}i^2+8^2+9^2+\sum_{i=10}^{14}i^2+15^2+\sum_{i=16}^{19}i^2$$

② تغییر محدوده اندیس :

$$\sum_{i=m}^{n}h(i)=\sum_{i=m-k}^{n-k}h(i+k)\quad \text{یا}\quad \sum_{i=m+k}^{n+k}h(i-k)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=3}^{12} i^3 = \sum_{i=1}^{10} (i+2)^3$$

$$= \sum_{i=7}^{16} (i-4)^3$$

سری‌های توانی :

- سری‌های عددی سری‌هایی هستند که در آن جملات تا حد تکراری شود و درون آن جملات از n است . (سری‌های حقیقی) این سری‌ها همواره یا همگرا هستند و یا واگرا .

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

اما گاهی درون تابع عبارتی یا جزئی از x است .

که سری‌ها به این فرم را سری توانی گویند .

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

(سری به مرکز صفر)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

(سری به مرکز c)

- برای بررسی همگرا یا واگرا بودن سری توانی مجدداً از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم .

فرض کنیم سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ باشد آنگاه :

آزمون نسبت : $\left| \dfrac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1$

$$|x| < \frac{1}{\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = r = \text{شعاع همگرایی}$$

برای این بازه سری همگرای مطلق $|n|<2 \to -2<n<2$

از این بازه سری واگرا است.

- اگر سری به مرکز c باشد بازه همگرایی ← $(c-r, c+r)$ است.

نتیجه. سری توانی فقط یکی از سه حالت زیر را می‌تواند داشته باشد.

① سری توانی فقط در مرکز همگرا است. (همواره در مرکز سری توانی همگرا است.) ← $\boxed{r=0}$

② سری در تمام IR همگرا است ← $\boxed{r=\infty}$

③ بازه‌ای وجود دارد به شکل $(c-r, c+r)$ که سری درون بازه همگرا و بیرون آن واگرا است.

$$\sum \frac{n^n}{n!}$$

آزمون نسبت $\lim \left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| \to \lim \left|\frac{n^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|n|<1 \to |n|<(n+1) \xrightarrow{\lim n\to\infty} = \infty$$ پس $r=\infty$

سری همواره همگرا است به ازای تمام $n\in IR$.

نکته.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^n = a_1 n + a_2 n^2 + \dots$$

از آن جا که افزایش یا کاهش تعداد متناهی جملات اثری در رفتار سری توانی (همگرایی) ندارد، برای این که بتوان

چه جملاتی را باید حل کرد (برای اضافه کردن جمله ثابت) به توان n را از صفر شروع می‌کنیم.

$\sum_{n=0}^{\infty}$ از این به بعد

یادآوری: سری توانی هم به x و هم به n وابسته است پس یک تابع دو متغیره وجود دارد

برای هر سری‌های توانی x مهم است. $f(x,n)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

قضیه ۱. اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $x=c$ همگرا باشد آنگاه به ازای تمام

مقادیر $|x|<|c|$ همگرا است.

اگر به ازای $x=d$ واگرا باشد آنگاه سری به ازای تمام مقادیر $|x|>|d|$ واگرا است.

سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \qquad a = \text{جمله اول} \qquad r = \text{قدر نسبت}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=r$$ که چون

در سری هندسی داریم:

$\sum_{n=0}^{\infty} \to$ $S_n=\frac{a}{1-r^n}$ مجموع n جمله اول سری

$S=\frac{a}{1-r}$ مجموع کل سری

ادامه

Year. Month. Date. ( )

فرمول های سری ها

① سری فرمول های سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

قضیه تیلور :

چند جمله ای تیلور را هم داریم : با ازای هر نقطه a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

سری مک لورن با ازای $a=0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!}$$

مطلوب است یافتن سری توانی تابع $f(x)=e^x$

نقطه صفر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!} =$$

$$f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(10)}(0)x^{10}}{10!} + \dots$$

$$y=e^x \rightarrow \forall n = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(x) = 1 + \frac{1x}{1!} + \frac{1x^2}{2!} + \frac{1x^3}{3!} + \dots + \frac{1x^{10}}{10!} + \dots$$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \longrightarrow$$ برای همه x ها مثبت

$\Rightarrow y = \sin x$

$$\sin x = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \dots$$

$y(0)=0$

$y' = \cos x \to y'(0)=1$

$y'' = -\sin x \Rightarrow y''(0)=0$

$y''' = -\cos x \Rightarrow y'''(0)=-1$

* مشتق توابع فرد زوج و زوج فرد است.

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$$

+ تفاوت توان‌های سینوس با توان‌های کسینوس در $(-1)^n$ است.

مشتق و انتگرال سری‌های توانی:

$$f(a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

مشتق نسبت به x ←

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)'(x^n)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' \longrightarrow \boxed{f'(x) = \sum_{\cancel{n=0} \to n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}$$

— در مشتق‌گیری نسبت به n از صفر شروع نمی‌کنیم چون جمله ثابت صفر است.

Year. Month. Date. ( )

$$\int \sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

روش حل یک معادله دیفرانسیل با استفاده از سری های توانی :

(1) فرض کنید معادله دارای جوابی به فرم سری به شکل $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ داشته باشد .

(2) با مشتق گیری از سری به تعداد n ، در معادله جایگذاری میکنیم .

(3) با روش اول تغییر ~~متغیر~~ اندیس ، اندیس های جملات را به جای به بیشترین اندیس تبدیل میکنیم .
(لازم است جملاتی که بیرون آورده شود)

(4) با روش دوم تغییر اندیس ، اندیس های x های موجود را مساوی میکنیم .

(5) سری ها را با هم جمع میکنیم و جملات را از نظر به تفکیک در ضرایب قرار میدهیم .

(6) a_0 ، a_1 معمولاً ثابت می مانند و a_2 به بعد جملات بقیه a ها بر حسب این دو جمله به دست می آید .

(7) جایگذاری . (a_0 ، a_1 را ثابت فرض کنیم جواب هستند)

(8) یافتن شعاع همگرایی سری . (دقت کنید سر امتحان این قسمت را نمیخواهد)

Year. Month. Date. ( )

معادلات زیر را با استفاده از سری‌های توانی حل کنید.

(1) $y''+y=0$

فرض می‌کنیم: جواب معادله به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

(سری‌ها را هم درجه گذاری می‌کنیم) ←

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + a_0 + a_1 x = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

$$a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}$$

شروع جملاتش چون از x^2 است
تفاوت است جایگذاری می‌کنیم

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)a_n + a_{n-2}\right) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

ضرایب جملات x^0 $\xrightarrow{n=2}$ $2(2-1)a_2 + a_0 = 0 \rightarrow \boxed{a_2 = \frac{-a_0}{2}}$

ضرایب جملات x^1 $\xrightarrow{n=3}$ $3(3-1)a_3 + a_1 = 0$

$$6a_3 + a_1 = 0$$

$$\boxed{a_3 = \frac{-a_1}{6}}$$

sin h
exp h
اکسپوننشیال هایپربولیک

(۱)

مسأله : $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ پس $y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\quad y'+y=0$

$\underbrace{y=\sum a_n x^n,\ y'=\sum n a_n x^{n-1}}_{\text{فرض}} \qquad \underbrace{y'+y=0}_{\text{مسأله}}$

پس با جایگذاری داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

شروع با x^0 — شروع با x^0

پس روش اول تغییر باند لازم است .
با روش دوم باندها را یکسان می‌کنیم .

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n + a_{n-1}) \underbrace{x^{n-1}}_{\text{فاکتور}} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \longrightarrow x^0 \text{ درجه } n=1 \rightarrow 1\times a_1 + a_0 = 0$$

$\rightarrow a_1 = -a_0$

x^1 درجه $n=2 \longrightarrow 2a_2 + a_1 = 0 \rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$

x^2 درجه $n=3 \longrightarrow 3a_3 + a_2 = 0 \rightarrow a_3 = \frac{-a_2}{3} = -\frac{a_0}{6}$

x^3 درجه $n=4 \longrightarrow 4a_4 + a_3 = 0 \rightarrow a_4 = -\frac{a_3}{4} = +\frac{a_0}{24}$

x^4 درجه $n=5 \longrightarrow 5a_5 + a_4 = 0 \rightarrow a_5 = -\frac{a_0}{120}$

جایگذاری در جواب $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^n + \cdots$

$$y = a_0 - a_0 x + \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{a_0}{6} x^3 + \frac{a_0}{24} x^4 - \frac{a_0}{120} x^5 + \cdots = a_0$$

$$a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = \sum a_0 \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

(2)

د) معادله را به صورت سری توانی بنویسید.

$$y'' - y' + y = e^x$$

نکته: روش حل سری تاکنون فقط برای معادلاتی است که ریشه ضرایب مشتقات آنها صفر نباشد (نقاط معمولی)

فرض جواب بصورت $\rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

جاگذاری: $\sum_{n=}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

اگر توان‌هایی که شروع می‌شوند همه یکی نبود باید اندیس‌ها را عوض کنیم

شروع هر سه x^0 (روش اول اندیس ندارد)

روش دوم: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$(1 + x + \frac{x^2}{2})$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1) a_n - (n-1) a_{n-1} + a_{n-2} \right] x^{n-2} = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

x^0 ضریب $\xrightarrow{n=2} 2\times 1\, a_2 - 1\times a_1 + a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 - a_0 + 1}{2}$

x^1 ضریب $\xrightarrow{n=3} 3\times 2\, a_3 - 2\times a_2 + a_1 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{2a_2 - a_1 + 1}{6} = \frac{\cancel{2}\frac{a_1 - a_0 + 2}{\cancel{2}} - a_1}{6} = \frac{2 - a_0}{6}$

x^2 ضریب $\xrightarrow{n=4} 12 a_4 - 3a_3 + a_2 = \frac{1}{2} \rightarrow a_4 = \cdots$

$\vdots$

(3)

مثال: $y'' - xy = 0$ فرض میکنیم* $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$ فرض x ضرب شده

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{\text{شروع } x^0} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n}_{\text{شروع } x^1} = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

روش اول: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \underbrace{+0}_{\text{جمله سوم که کم شده}} = \sum_{n=0}^{\infty} 0$

روش دوم برای یکسان کردن اندیس $\longrightarrow$ فرض میکنیم: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \longrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n\right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$ *تساوی ضرایب نظیر به نظیر $\longrightarrow$

ضریب: x^0 $n=0 \rightarrow 2 \times 1\, a_2 - 0\, a_0 \longrightarrow a_2 = 0$

x^1 $n=1 \rightarrow 3 \times 2\, a_3 - a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = \frac{a_1}{6}$

x^2 $n=2 \rightarrow 4 \times 3\, a_4 - 2 a_2 = 0 \longrightarrow a_4 = \frac{a_2}{6} = 0$

x^3 $n=3 \rightarrow 5 \times 4\, a_5 - 3 a_3 = 0 \longrightarrow a_5 = \frac{3 a_3}{20} = \frac{3 a_1}{120} = \frac{a_1}{40}$

x^4 $n=4 \rightarrow 6 \times 5\, a_6 - \ldots$

4

$y'' - (x+1)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad x \neq 1$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ $\qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

$x^0 \qquad x^1 \qquad x^0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=-1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \cancel{a_{-1}}^{\,0} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-2} - \sum_{n=2} a_{n-2} x^{n-2} = 1 + 2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1) a_n - a_{n-3} - a_{n-2} \right] x^{n-2} = 1 + 2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n$$

$x^0 \rightsquigarrow n=2 \longrightarrow 2a_2 - \cancel{a_{-1}}^{\,0} - a_0 = 1$

$\vdots$

نکته: حل معادله دیفرانسیل به صورت سری توانی در نقاط منفرد منتظم؛

تعریف نقطه منفرد منتظم: اگر معادله دیفرانسیل خطی به فرم:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

باشد صفر کننده های a_n را نقاط منفرد منتظم می‌نامند.

حل در نقاط منفرد منتظم- ثابت می شود که معادله در نقاط منفرد منتظم جوابی به فرم:

5

برای کل معادله ها تدقیق عمل می کنیم. $y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

با این تفاوت که x^s وارد سری می شود و در نتیجه تمام جملات باید از x^s شروع شوند.

مسأله:

$(x+1)y'' - y = 0$ جواب: چون صفر یک نقطه منفرد منظم معادله است

پس جواب به صورت: $y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \stackrel{b}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$ است.

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1}$ $\quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n+s-1)(n+s) a_n x^{n+s-2}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} x \sum_{n=2}^{\infty} (n+s-1)(n+s) a_n x^{n+s-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0 \longrightarrow$

$\sum_{n=2}^{\infty} (n+s-1)(n+s) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$

شروع با x^{s+1} — شروع با x^s

$\xrightarrow[\text{شروع } x^s]{\text{روش اول تغییر اندیس}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+s-1)(n+s) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} -$

$s(s+1) a_1 x^s = 0$

$\xrightarrow{\text{روش دوم باندیس } \underline{1}} \sum_{n=1}^{\infty} (n+s-1)(n+s) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+s-1}$

$- s(s+1) a_1 x^s = 0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+s-1)(n+s) a_n - a_{n-1} \right] x^{n+s-1}$

$- s(s+1) a_1 x^s = \sum 0$

نکته: لزوماً S صحیح نیست. $S \in \mathbb{R}$

S به تعداد مرتبه بدست می آید.

Year. Month. Date. ( )

x^2 ضرب $\xrightarrow{n=4}$ $4(4-1)a_4 + a_2 = 0$

$$12a_4 + \frac{-a_0}{2} = 0 \rightarrow \boxed{a_4 = \frac{a_0}{24}}$$

x^3 ضرب $\xrightarrow{n=5}$ $5(5-1)a_5 + a_3 = 0 \rightarrow 20a_5 - \frac{a_1}{6} = 0$

$$\boxed{a_5 = \frac{a_1}{120}}$$

x^4 ضرب $\xrightarrow{n=6}$ $6(6-1)a_6 + a_4 = 0$

$$30a_6 + \frac{a_0}{24} \rightarrow \boxed{a_6 = \frac{-a_0}{720}}$$

فرض $\Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

$$y = a_0 + a_1x + \left(\frac{-a_0}{2}\right)x^2 + \left(\frac{-a_1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{a_0}{24}\right)x^4 + \dots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1x^2}{4} + \frac{1x^4}{24} - \frac{1x^6}{720}\right)\dots + a_1\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots\right)$$

x برحسب سری x

۲۶ آذر ۹۵ ه

فصل پنجم
توابع بسل

تابع گاما (Γ یا γ) ←

$x>0$ ← تعریف شده است $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$$D_\Gamma=(0,+\infty)$$

همواره داریم رابطه بازگشتی:

$$\begin{cases}\Gamma(1)=1\\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad \text{مهم}\end{cases}$$

مثال $\Gamma(1)=1$

$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$

$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\times1$

$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\times2\times1$

$\vdots$

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$

می‌توان با استدلال و خواص مشابه ثابت کرد:

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ (تمرین کلاس حل شود)

تعریف فاکتوریل برای اعداد مثبت: $\quad n! = \Gamma(n+1) \quad \forall n\in R^{+}$

تمرین $\quad \frac{1}{2}! = ?$ (حل جلسه بعد)

+ تابع گاما هیچ جا برابر صفر نیست.

تعریف تابع پسای (ψ):

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \left(\ln\Gamma(x+1)\right)'$$

مسئله. حل معادلات خطی همگن (بدون کران)

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\alpha^2)y = 0$$

معادله بسل α

حل به روش سری‌ها: $c_1y_1 + c_2y_2$ = جواب

تابع بسل نوع اول:

$$y_1 = J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+\alpha}}{m!\,(m+\alpha+1)}$$

$$y_2 = J_{-\alpha}(x)$$

حالت ۱) اگر α صحیح باشد (n) ← به جای α عدد n قرار می‌دهیم در $J_\alpha(x)$.

Year. Month. Date. ( )

+ نکاتی در مورد توابع J_α (توابع بسل مرتبه اول)

① $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

② $\left(x^{\alpha} J_\alpha(x)\right)' = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$

③ $\left(x^{-\alpha} J_\alpha(x)\right)' = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$

④ $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\, \sin x$

⑤ $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\, \cos x$

نکته: $\int_{-\infty}^{+\infty} \neq \frac{1}{2}\int_0^{\infty}$ مگر اینکه تابع متقارن باشد.

نکته: $\int_{-\infty}^{+\infty} \neq \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T}$ چون باید بصورت مجزا حد گرفت

چون شاید در نقطه‌ای ناپیوسته باشد

نکته: $\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{T\to\infty} \int_0^{T} + \lim\limits_{T\to\infty} \int_{-T}^{0}$

فصل ششم :

دستگاههای معادلات خطی :

نکته: بحث در مورد جواب دستگاه ها

فرض کنیم یک دستگاه دارای m معادله و n مجهول باشد

① اگر $m=n$ آن گاه جواب منحصر به فرد است . (جواب موجود یکتا است .)
" تعداد معادلات = تعداد مجهولات "

② اگر $n<m$ آن گاه دستگاه جواب ندارد .

③ اگر $n>m$ آن گاه دستگاه بی شمار جواب دارد .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

به کمک →

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \underset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

Year. Month. Date. ( )

① اگر دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد آنگاه دستگاه یا جواب ندارد و یا دارای بی شمار جواب است.

② اگر دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد آنگاه دستگاه ها برای هر n یک جواب منحصر به فرد دارد. (مثل ۹ و ۶ صفحه ۲۵)

تعریف یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی n معادله و n مجهول:

دستگاهی است که دارای n معادله دیفرانسیل خطی از توابع y_1 تا y_n که هر کدام از معادلات شامل مراتب دلخواهی از مشتقات y_1 تا y_n خواهند بود.

ضرایب در معادلات می توانند توابعی از x باشند.

$$\begin{cases} a_{11}(x)\, y_1^{(n)} + a_{12}(x)\, y_2^{(m)} + \dots + a_{1n}\, y_n^{(p)} = f_1(x) \\ \vdots \end{cases}$$

روش های حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی:

۱. تبدیل هر معادله به n معادله مرتبه اول: مراتب مشتقات y_1 تا y_n را طوری برابر

مثلا با $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ قرار می دهیم که هر معادله فقط دارای مشتق اول باشد.

Year. Month. Date. ( )

مرتبه اول و بشته باید فرض کنیم تمام توابع را به ترتیب $u_1, u_2, u_3, \ldots$ برای آن‌ها قرار می‌دهیم.

فرض کنید $y^{(n-1)}$ برابر u_p باشد. در این صورت $y^{(n)}$ را برابر با u_p' قرار می‌دهیم.

مثال. معادله زیر را به n معادله مرتبه اول و با n تابع تبدیل کنید.

$$3y'' + 2y' - 3xy = 2x \qquad y = u_1$$

$$y' = u_2$$

جایگذاری $\rightarrow \begin{cases} 3u_2' + 2u_2 - 3xu_1 = 2x \\ u_2 = u_1' \end{cases} \qquad y'' = u_2'$

تبدیل شد به یک دستگاه 2 معادله و 2 مجهول u_1 و u_2.

~~[illegible]~~ 3

مثال 2. معادله زیر را به معادله مرتبه اول و با n تابع تبدیل کنید.

$$3x^2y''' + y'' - 2y = 3$$

جایگذاری

$$y = u_1$$

$$y' = u_2$$

$$y'' = u_3$$

$$y''' = u_3'$$

$$\begin{cases} 3x^2u_3' + u_3 - 2u_1 = 3 \\ u_3 = u_2' \\ u_2 = u_1' \end{cases}$$

تبدیل به دستگاه سه معادله مرتبه اول و سه مجهول u_1 و u_2 و u_3 شد.

BERKEH

Year. Month. Date. ( )

مثال 3.

$$x^5 y^{(4)} - 3y^{(2)} = 2x$$

$$y = u_1$$
$$y' = u_2$$
$$y'' = u_3$$
$$y''' = u_4$$
$$y^{(4)} = u'_4$$

$$\begin{cases} x^5 u'_4 - 3u_3 = 2x \\ u_4 = u'_3 \\ u_3 = u'_2 \\ u_2 = u'_1 \end{cases}$$

تبدیل به دستگاه ۴ معادله مرتبه اول از مجهول‌های u_1 و u_2 و u_3 و u_4.

حل دستگاه‌های از درجه یک معادلاتی که چند متغیر وجود دارد:

متغیرها x_i:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x+5 \\ x'_1 + x''_2 = 3x^3 \end{cases}$$

کافی است از معادله درجه یک متغیره متغیر مذکور را پیدا و در معادله دوم قرار دهیم.

$$x_1 = \int (2x+5)dx = x^2 + 5x + C$$

جایگذاری در معادله دوم $\longrightarrow$ $2x+5+x''_2 = 3x^3$

$$\longrightarrow x''_2 = 3x^3 - 2x - 5$$

$$\longrightarrow x'_2 = \int (3x^2 - 2x - 5)dx = \frac{3}{4}x^4 - x^2 - 5x$$

$$x_2 = \int x'_2 \, dx = \frac{3}{2}x^5 - \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + C$$

Year. Month. Date. ( )

روش حذفی حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل خطی :

(1) دستگاه را به فرم عملگری D می‌نویسیم .

(2) به ضرب معادله در ضرایب D یکی از متغیرها را به جمع در معادله حذف می‌کنیم، اکنون یک معادله برحسب یک متغیر وجود دارد که به
روش‌های قبل قابل حل است .

(3) پس از محاسبه یکی از مجهول‌ها کافی است در یکی از معادلات جایگذاری شده و متغیر دوم

را بدست آوریم .

نکته : گاهی معادلات جدید با ضرب در ضرایب D و جمع معادلات به دست می‌آید .

در این حالت می‌توان معادله جدید را با نوشتن هر یک از دو معادله حل کرد .

۱. دستگاه‌های زیر را حل کنید .

(1)
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\dfrac{dx_1}{dt} - x_1 + \dfrac{dx_2}{dt} + 4x_2 = 1 \\ \dfrac{dx_1}{dt} - \dfrac{dx_2}{dt} = t - 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2Dx_1 - x_1 + Dx_2 + 4x_2 = 1 \\ Dx_1 - Dx_2 = t - 1 \end{cases}$$

Year. Month. Date. ( )

نکته: از ضرب D در توابع، مشتق آن اعمال می‌شود.

$$-D\;\begin{cases}(2D-1)x_1+(D+4)x_2=1\\ Dx_1-Dx_2=t-1\end{cases}\;(2D)$$

$$\begin{cases}-D(2D-1)x_1+-D(D+4)x_2=-D.1=0\\ ((2D-1)D)x_1-(2D^2-D)x_2=\underbrace{(2D-1)}_{\text{خودش مشتق آن}}(t-1)=2(t-1)'-\text{[illegible]}\end{cases}$$

$$\rightarrow\;-(D^2+4D+2D^2-D)x_2=1$$

$$\Rightarrow\;(-3D^2-3D)x_2=1$$

به یک معادله تک مجهول رسیدیم.

$$3x_2''-3x_2'=1$$

که معادلات معمولی حل شود و جواب در هر یک از معادلات جایگذاری شود.

حل از نوع مرتبه دوم

2

$y'=p$ تغییر متغیر

(2)

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}-x_1+\dfrac{dx_2}{dt}+x_2=0\\[2mm] \dfrac{2dx_1}{dt}-2x_1+2\dfrac{dx_2}{dt}-2x_2=t\end{cases}$$

حل

$$\rightarrow\begin{cases}Dx_1-x_1+Dx_2+x_2=0\\ 2Dx_1-2x_1+2Dx_2-2x_2=t\end{cases}$$

Year. Month. Date. ( )

$$2\times\begin{cases}(D-1)x_1+(D+1)x_2=0 \\ (2D-2)x_1+(2D-2)x_2=t\end{cases}$$

$$\to -\begin{cases}(2D-2)x_1+(2D+2)x_2=0 \\ (2D-2)x_1+(2D-2)x_2=t\end{cases}$$

$$\Rightarrow (2D+2-2D+2)x_2=-t$$

$$4x_2=-t \to x_2=-t/4$$

جایگذاری در معادله ۱ $\to Dx_1-x_1+Dx_2+x_2=0$

$$\Rightarrow x_1'-x_1-\frac{1}{4}-\frac{t}{4}=0 \to$$ حل معادله خطی

$$x_1'-x_1-\frac{1}{4}(t+1)=0$$

③ $$\begin{cases}\dfrac{d^2x_1}{dt^2}-4x_1+\dfrac{dx_2}{dt}=0 \\ -\dfrac{4dx_1}{dt}+\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2=0\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}D^2x_1-4x_1+Dx_2=0 \\ -4Dx_1+D^2x_2+2x_2=0\end{cases}$$

$$\to \begin{cases}\times(D^2+2): & (D^2-4)x_1+Dx_2=0 \\ \times D: & -4Dx_1+(D^2+2)x_2=0\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (D^4-2D^2-8)x_1+(D^3+2D)x_2=0 \\ -4D^2x_1+(D^3+2D)x_2=0 \end{cases}$$

تفاضل $\rightarrow (D^4+2D^2-8)x_1=0$

x_1 حل عمومی $\rightarrow$ معادله مشخصه: $r^4+2r^2-8=0$

$$(r^2+4)(r^2-2)=0 \; \begin{cases} \pm\sqrt{2} \\ \pm 2i \end{cases}$$

$$\rightarrow x_1=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3e^{-2ix}+c_4e^{2ix}$$

$$=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+c_3(\cos 2x+i\sin 2x)+c_4(\cos 2x-i\sin 2x)$$

با جایگذاری در معادله اول و ادامه حل -

(4) $\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}-\dfrac{d^2x_2}{dt^2}-x_2=e^t \\ x_1+3\dfrac{dx_2}{dt}=t^3-5 \end{cases}$

$$\begin{matrix} \times D \\ \longrightarrow \\ \times(D^2+1) \end{matrix} \begin{cases} Dx_1-(D^2+1)x_2=e^t \\ x_1+3Dx_2=t^3-5 \end{cases}$$

Year. Month. Date. ( )

$$\rightarrow \begin{cases} D^2 x_1 - (D^3+D)x_2 = e^t \\ (D^2+1)x_1 + 3(D^3+D)x_2 = \underbrace{(t^3-5)''(t^3-5)}_{6t\,-\,t^3-5} \end{cases}$$

BERKEH

1

تبدیل لاپلاس:

تعریف تبدیل: تابعی است که به هر تابع از دامنه اش یک تابع با متغیر جدید نسبت می دهد.
تبدیل لاپلاس: تعریف: به ازای $s>0$ تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را با نماد $L[f]$ نمایش می دهیم که تابعی از متغیر s است. ($L[f]_{(s)}$) و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$L[f]_{(s)}=\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

⇐ تبدیل لاپلاس را نشان می دهد (که با انتگرال به روش جزء به جزء)

گاهی نمایش لاپلاسین هر تابع با حرف بزرگ آن نمایش داده می شود.

مثال: تبدیل لاپلاس تابع ثابت $f(t)=1$ را بیابید.

$$L[1]_{(s)}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow \lim\left(-\tfrac{1}{s}e^{-ts}\right)\Big|_0^T=\lim\left(-\tfrac{1}{s}e^{-sT}+\tfrac{1}{s}e^{-s\times 0}\right)=\tfrac{1}{s}$$

خواص تبدیل لاپلاس

این تابع خواص خطی دارد یعنی ضریب ثابت نسبت به s از آن بیرون می آید. یعنی اگر c ثابت باشد

$$c\,L[f]_{(s)}=L[cf]_{(s)}$$

و روی جمع می شکند یعنی:

$$L[f+g]_{(s)}=L[f]_{(s)}+L[g]_{(s)}$$

فرمول‌های معروف لاپلاس:

$$L[C]_{(s)}=\frac{c}{s}$$

$$L[e^{at}]_{(s)}=\frac{1}{s-a} \qquad \forall a$$

$$L[\sin at]_{(s)}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$L[\cos at]_{(s)}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L[\sinh at]=\frac{a}{s^2-a^2}$$

$$L[\cosh at]=\frac{s}{s^2-a^2}$$

$$L[t^{-1/2}]=\sqrt{\pi/s}$$

$$L[t^a]=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}=\frac{a!}{s^{a+1}}$$

تذکر: فرض کنیم f و f' در R^+ پیوسته و هر دو دارای تبدیل لاپلاس باشند در این صورت:

$$L[f']_{(s)} = sF_{(s)} - f(0) = sL[f]_{(s)} - f(0)$$

نتیجه: با توجه به فرمول بالا خواهیم داشت:

$$L[f'']_{(s)} = sL[f']_{(s)} - f'(0)$$

$$L[f'']_{(s)} = s\left[sL[f]_{(s)} - f(0)\right] - f'(0) = s^2L[f]_{(s)} - sf(0) - f'(0)$$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از لاپلاس:

روش کار: ابتدا از دو طرف معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم و آن را ساده می‌کنیم سپس با فرمول‌ها به جای تبدیلات لاپلاس مشتق و با کمی جاگذاری می‌کنیم. اکنون درون معادله فقط لاپلاس y به همراه کسرهایی از s وجود دارد. سپس لاپلاس y را برحسب s می‌یابیم. در آخر جواب مقدار لاپلاس y را به صورت کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم که با فرمول‌های لاپلاس ... شود و آخر حدس می‌زنیم مقدار y را با توجه به فرمول‌های لاپلاس چیست (محاسبه L^{-1})

نکته: برای گرفتن تبدیل لاپلاس از توابع n ضابطه‌ای از توابع پله‌ای واحد استفاده می‌کنیم.

تابع پله‌ای واحد با مشخصه c تابعی است با دامنه $[0,+\infty)$ که برابر است با

$$u_c(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<c\\ 1 & c\le t\end{cases}$$

برای مثال برای تابع دلخواه n ضابطه‌ای زیر داریم

$$f(t)=\begin{cases}f_1(t) & 0\le t<a\\ f_2(t) & a\le t<b\\ f_3(t) & b\le t<c\\ f_4(t) & c\le t\end{cases}$$

می‌توان این تابع را به تک ضابطه به صورت زیر تبدیل کرد (فرمول)

$$f(t)=f_1(t)+(f_2-f_1)u_a(t)+(f_3-f_1-f_1)u_b(t)+(f_4-f_3-f_2-f_1)u_c(t)$$

قاعده: تبدیل لاپلاس

$$e^{-cs}\,L[f]=L[u_c(t)\,f(t-c)]$$

$$L[u_\pi(t)\sin(t-\pi)] = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$L[u_3(t)(t+2)] = L[u_3(t)(t+2)] = L[u_3(t)\,(\underbrace{t-3}_{T})+5] = e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{5}{s}\right)$$

$$L[u_1(t)\,t^2] = L[u_1(t)[\underbrace{(t-1)^2+2(t-1)+1}_{T+2T+1}]] = e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

تأکید:

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

مثال:

$$L[t^5e^{2t}] = \frac{5!}{(s-2)^6}$$

$$L[e^{3t}\sin t] = \frac{1}{(s-3)^2+1}$$

$$L\left[e^{t/2}\cos\frac{3t}{7}\right] = \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+(3/7)^2}$$

$L[0]=0$

حل معادلات با مقادیر اولیه با استفاده از تبدیل لاپلاس:

۱. لاپلاس از دو طرف معادله
۲. یافتن لاپلاس y
۳. یافتن y با گرفتن L^{-1}

مثال:

$y''-y=0 \qquad y(0)=y'(0)=1$

$L[y''-y]=L[0]=0 \Rightarrow L[y'']-L[y]=0$

$L[y']=sL[y]-y(0) \quad , \quad L[y'']=s^2L[y]-sy(0)-y'(0)$

$s^2L[y]-sy(0)-y'(0)-L[y]=s^2L[y]-s-1-L[y]=0$

$\Rightarrow L[y]=\dfrac{1+s}{s^2-1}=\dfrac{1}{s^2-1}+\dfrac{s}{s^2-1} \Rightarrow y=\sinh t+\cosh t$

مثال:

$y''+y'-y=\cos t-2\sin t \qquad y(0)=0 \qquad y'(0)=1$

$L[y'']+L[y']-L[y]=L[\cos t-2\sin t]=\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}=\frac{s-2}{s^2+1}$

$s^2L[y]-1+sL[y]-L[y]=\frac{s-2}{s^2+1}$

$L[y]=\dfrac{\frac{s-2+s^2+1}{s^2+1}}{s^2+s-1}=\frac{1}{s^2+1}$

$y''+2y'=9e^{2t} \qquad y(0)=1 \quad y'(0)=2$

$L[y'']+2L[y']=\frac{9}{s-2} \Rightarrow s^2L[y]-s\overset{1}{\cancel{y(0)}}-\overset{2}{\cancel{y'(0)}}+2sL[y]-2\overset{1}{\cancel{y(0)}}=\frac{9}{s-2}$

$s^2L[y]-s-2+2sL[y]-2=\frac{9}{s-2} \Rightarrow (s^2+2s)L[y]=\frac{9}{s-2}+s+4$

$L[y]=\frac{s^2+2s-2}{s(s^2-4)}=\frac{s}{s^2-4}+\frac{2s}{s(s^2-4)}-\frac{2}{s(s^2-4)}$

$\Rightarrow y=\cosh 2t+\sinh 2t-\ldots$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-4x_1+\frac{dx_2}{dt}=0 \quad , \quad -4\frac{dx_1}{dt}-\frac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2=0$$

$$\begin{cases} D^2x_1-4x_1+Dx_2=0 \\ -4Dx_1-D^2x_2+2x_2=0 \end{cases} \xrightarrow[(D^2-4)\times]{4D\times} \begin{cases} (D^2-4)x_1+Dx_2=0 \\ (2-D^2)x_2-4Dx_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4D(D^2-4)x_1+4D^2x_2=0 \\ -4D(D^2-2)x_1-(D^4-6D^2+8)x_1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (D^4-10D^2+8)x_1=0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2}-4x_2=t^2-5 \\ \dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2=e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^2x_1-4x_2=t^2-5 \\ Dx_1+D^2x_2+2x_2=e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^2x_1-4x_2=t^2-5 \\ (D^2+2)x_2+Dx_1=e^t \quad \times D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{D^2x_1}-4x_2=t^2-5 \\ (D^3+2D)x_2+\cancel{D^2x_1}=e^t \end{cases} \Rightarrow -4x_2-(D^3+2D)x_2=t^2-5-e^t$$

$$\Rightarrow -4x_2-x_2'''-2x_2'=0$$

همه ی معادلات از طریق سری ها و لاپلاس حل نمی شوند. اگر شرایط اولیه بود لاپلاس اگر نبود سری ها.

نکته: تعریف کانولوشن یا ضرب پیچشی دو تابع:

فرض کنید f و g دو تابع پیوسته باشند در این صورت ضرب پیچشی f و g را به فرم زیر تعریف می کنیم و نمایش می دهیم.

$$f*g=\int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

نکته: $f*g=g*f$

کاربرد قضیه: برای دو تابع f و g که دارای تبدیلات لاپلاس باشند اگر F و G تبدیلات لاپلاس f و g باشند

آنگاه: $h(t)=f*g \Longleftrightarrow H(s)=F(s).G(s)$

مثال: $L^{-1}\left[\frac{s^2}{s^4+4s^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{s^2}{s^2(s^2+4)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=\frac{1}{2}\sin 2t$

$y'' - y = -2\cos t \qquad y'(0) = 0 \quad y(0) = 1$

$s^2 L[y] - s y(0) - y'(0) - L[y] = \dfrac{-2s}{s^2+1}$

$s^2 L[y] - s - L[y] = \dfrac{-2s}{s^2+1} \Rightarrow L[y] =$

(s^2-1)

کاربرد دیگر تبدیل لاپلاس در حل معادلات انتگرالی است. در حل این معادلات کافی است از دو طرف معادله لاپلاس بگیریم.

$g(t) = \frac{1}{2}t^2 - \int_0^t (t-u)\, g(u)\, du$

$L[g] = \frac{1}{2} L[t^2] - L\left\{\int_0^t (t-u) g(u)\, du\right\} = \frac{1}{s^3} - L[t * g]$

$L[g] = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} L[g]$

$L[g]\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow L[g] = \dfrac{1}{s(s^2+1)} \Rightarrow g = 1 * \sin t$