ریاضی عمومی۱

فصل اول: (مطالب پیش نیاز).................... ۲

فصل دوم: (فرمول های مشتق و…)..................27

فصل سوم: (مشتق ضمنی و پارامتری و…)..............45

فصل چهارم: (مشتق زنجیره ای و f^g و…)..............67

فصل پنجم: (کاربردهای مشتق و…)..................89

فصل ششم: (تست های مشتق)........................115

فصل هفتم: (انتگرال و…)........................125

فصل هشتم: (انتگرال معین و….)....................146

فصل نهم: (توابع هذلولی-انتگرال ناسره و…).........195

فصل دهم: (مختصات قطبی-اعداد مختلط و…)............215

فصل یازدهم: (تست های انتگرال و…)..................237

(جهت آمادگی کنکورکاردانی به کارشناسی وفراگیرپیام نور)

استاد: میرزایی

تماس:

E-mail: soolmazmirzaei@yahoo.com

فصل اول

(مطالب پیش نیاز ومقدماتی ازریاضی عمومی)

معرفی چند مجموعه مهم از اعداد در ریاضی

۱-مجموعه اعداد طبیعی $IN=\{1,2,3,...,100,101,...\}$

۲-مجموعه اعداد صحیح $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...,\pm100,\pm101,...\}$

۳-مجموعه اعداد گویا $Q=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in z\ ,b\neq 0\right\}$

مثال: $\left\{\pm\frac{1}{2},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{3}{4},...,0,\pm1,...\right\}$

نکته: رادیکال ها که جذر کامل ندارند مانند $\sqrt{3},\sqrt{2}$ و... در (Q) قرار ندارند بلکه در مجموعه اعداد اصم یا گنگ قرار می گیرند. (Q')

۴-مجموعه اعداد حقیقی IR : شامل تمامی اعداد + و − که کسری و رادیکالی و... هستند می باشد.

توان (a^n)

ضرب یک عدد در خودش به دفعات متوالی را توان گویند مثلا 2^5یعنی ضرب عدد ۲، ۵ بار در خودش

$2^5=2\times2\times2\times2\times2 \qquad a^6=a\times a\times a\times a\times a\times a$

قانون ضرب اعداد توان دار

۱-اگر پایه ها مساوی بود یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$2^3\times2^8\times2^4=2^{15}$

۲-اگر توان ها مساوی بود، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$3^5 \times 4^5 = (3\times 4)^5 = 12^5$

۳-اگر هم پایه و هم توان مساوی باشد هم از قانون ۱ و هم از قانون ۲ می توان استفاده کرد.

$2^5 \times 2^5 = 2^{10} \rightarrow$ هر دو عدد مساوی است $\leftarrow 2^5\times 2^5 = 4^5 = \left(2^2\right)^5 = 2^{10}$

قانون تقسیم اعداد توان دار

۱-اگر پایه ها مساوی باشد، یکی از پایه ها را نوشته، توان صورت را از توان مخرج کم کنید. $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$

۲-اگر توان ها مساوی باشد، یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم کنید.

$\frac{4^5}{3^5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5$

$\frac{5^6}{25^6} = \left(\frac{5}{25}\right)^6 = \left(\frac{1}{5}\right)^6$

نکته ۱-هر عدد به توان صفر برابر با یک می شود. $(3^0 = 1)$

نکته ۲- عدد یک (۱+) به توان هر عدد برابر با یک می شود. $1^n = 1$

نکته ۳- اگر عددی علامت منفی داشته باشد اگر به توان عدد زوجی برسد علامت منفی از بین می رود ولی اگر به توان عدد فردی برسد، علامت منفی باقی می ماند.

$(-2)^4 = +16 \quad (-2)^3 = -8$

نکته ۴- اگر توان یک عدد منفی باشد وقتی آن را برعکس می کنیم توانس مثبت می شود و بالعکس

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad 3^2 = \frac{1}{3^{-2}}$

مثال: عبارتهای زیر را ساده کنید:

الف) $\frac{2^5\times3^5}{3^2\times3^3}=\frac{6^5}{3^5}=\left(\frac{6}{3}\right)^5=2^5$

ب) $\frac{3^{-3}\times3^{-4}\times3^{-2}}{2^5\times2^{-6}\times2^{-8}}=\frac{3^{-9}}{2^{-9}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-9}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^9}=\left(\frac{2}{3}\right)^9$

رادیکال ها: فرجه n ام عدد a را با علامت $\sqrt[n]{a}$ نمایش می دهند در حالتی که $n=2$ باشد فرجه را نمی نویسند.

$\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$

نکته ۱- اگر فرجه n در رادیکال ها عدد زوج باشد (۲و۴و۶و...) نمی توان زیر رادیکال را عدد منفی قرار داد مثلاً $\sqrt[4]{-3}$ (بی معنی)

نکته ۲- اگر فرجه n در رادیکال ها عدد فرد باشد (۳و۵و۷و۹و...) چه عدد مثبت و چه عدد منفی را می توان زیر رادیکال قرار داد و مانعی ندارد مثلاً

$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

نکته ۳- $\sqrt[n]{0}=0\qquad\sqrt[n]{1}=1$

ضرب رادیکال ها

رادیکال ها را به شرطی می توان در هم ضرب کرد که فرجه های آن ها مساوی باشد. برای ضرب کردن یکی از فرجه ها را نوشته و عددهای زیر رادیکال را در هم ضرب کنید.

$\sqrt[5]{6}\times\sqrt[5]{7}=\sqrt[5]{42}$

ولی دو عدد $\sqrt[4]{2},\sqrt[3]{2}$ را نمی توان در هم ضرب کرد چون فرجه ها مساوی نیستند.

تقسیم رادیکال ها

رادیکال ها را به شرطی برهم تقسیم می کنیم که فرجه های آن ها مساوی باشد. یکی از فرجه ها را نوشته و عددهای زیر رادیکال را بر هم تقسیم می کنیم. $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{4}}=\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$

جمع و تفریق رادیکال ها

برای جمع یا تفریق رادیکال ها حتماً باید فرجه ها و اعداد زیر رادیکال دقیقاً مثل هم باشند. برای جمع یا تفریق، رادیکال را نوشته و فقط ضریب رادیکال ها را از هم کم یا با هم جمع می کنیم.

$$3\sqrt{3}-4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-10\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$$

تجزیه کردن یک عدد:

نوشتن یک عدد به صورت ضرب اعداد تواندار را تجزیه کردن عدد می نامند. برای تجزیه کردن معمولاً عدد را بر یکی از اعداد (۲و۳و۵و۷و۱۱) تقسیم و خارج قسمت را بدست می آوریم و این کار آنقدر ادامه پیدا می کند. که خارج قسمت ۱ شود.

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 81=3\times3\times3\times3=3^4$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 90=2\times3^2\times5$$

ساده کردن رادیکال ها در محاسبات

برای ساده کردن رادیکال ها در محاسبات ابتدا عدد زیر رادیکال را تجزیه می کنیم دو حالت زیر بوجود می آید.

۱-(فرجه = توان) در این صورت از قانون $\sqrt[n]{a^n}=a$ رادیکال حذف می شود. $\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

۲-(فرجه< توان) اگر توان بر فرجه قابل تقسیم باشد این تقسیم را انجام داده و عدد با توانی از زیر رادیکال بیرون می آید.

$$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$$

ولی اگر توان بر فرجه قابل تقسیم نباشد، توان را به بزرگترین عدد قبل از توان که بر فرجه قابل تقسیم باشد تبدیل کرده.

$$\sqrt[4]{2^9}=\sqrt[4]{2^8\times 2^1}=2^{\frac{8}{4}}\times\sqrt[4]{2}=4\sqrt[4]{2}$$

۳-(فرجه <توان) آنگاه عدد از زیر رادیکال نمی تواند بیرون بیاید. $\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$

نکته ۱- هر عدد به توان ۱ برابر با همان عدد است.

$$(50)^1=50$$

نکته ۲-

$$(a^m)^n=a^{mn}\rightarrow(3^5)^6=3^{30}$$

$$(ab)^n=a^nb^n\rightarrow(5^2\times 6^3)^4=5^8\times 6^{12}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\rightarrow\left(\frac{6^3}{5^3}\right)^5=\frac{6^{15}}{5^{15}}=\left(\frac{6}{5}\right)^{15}$$

بدست آوردن ک.م.م (کوچکترین مقسوم علیه مشترک دو عدد)

ابتدا عدد را تجزیه کرده پس از فرمول زیربدست می آوریم:

عامل های غیرمشترک×عامل مشترک بابزرگترین توان=ک.م.م

از ک.م.م در بدست آوردن مخرج مشترک کسرها استفاده می شود.

$4=2^2$ $\rightarrow$ ک.م.م $=2^2\times 3=12$

$6=2\times 3$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}$$

وقتی دو عدد بر هم بخش پذیر نباشند مخرج مشترک آنها برابر با حاصلضرب آنهاست مانند

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{5-8}{20}=\frac{-3}{20}$$

هرگاه دو عدد بر هم بخش پذیر نمی باشد، مخرج مشترک برابر با عدد بزرگتر است

$$\frac{2}{4}-\frac{7}{8}=\frac{4-7}{8}=\frac{-3}{8}$$

ضرب کسرها:

در ضرب $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ صورت کسرها در هم ضرب و مخرج کسرها هم در هم ضرب می شود.

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$$

تقسیم کسرها:

۱)کسر اول را نوشته علامت ÷را به ⊗تبدیل کنیم و کسر دوم را معکوس کرده

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{8}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

۲)برای تقسیم کسرها می توان از روش دور در دور و نزدیک در نزدیک استفاده کنیم.

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{8}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}}=\frac{2\times 8}{5\times 3}=\frac{16}{15}$$

$$3\div\frac{5}{8}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{8}}=\frac{3\times 8}{5\times 1}=\frac{24}{5}$$

۱-مخرج کسر نباید صفر شود (بی معنی = $\frac{k}{0}$)

۲- اگر صورت کسر صفر شود جواب کسر صفر است. $\left(\frac{0}{k}=0\right)$

گویا کردن کسرها

در مخرج کسری رادیکال با فرجه ۲ باشد برای گویا کردن، کسری در کنار کسر داده شده ضرب می کنیم که صورت و مخرج این کسر همان رادیکال مخرج می باشد مانند مثال

$$\frac{3}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\times5}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{A}{B\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{A\sqrt{a}}{Ba}$$

و اگر مخرج کسر رادیکالی با فرجه n (غیر از ۲) باشد از فرمول زیر استفاده می شود.

$$\frac{A}{B\sqrt[n]{a^m}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{a^{n-m}}}{Ba}$$

$$\frac{4}{5\sqrt[6]{3^2}}\times\frac{\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{3^4}}=\frac{4\sqrt[6]{3^4}}{5\times3}=\frac{4\sqrt[6]{3^4}}{15}$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{a^4}}\times\frac{\sqrt[5]{a^1}}{\sqrt[5]{a^1}}=\frac{3\sqrt[5]{a}}{a}$$

گویا کردن کسرها به فرم $\frac{A}{B\sqrt{a}\pm c\sqrt{d}}$.

$$\frac{A}{B\sqrt{a}+c\sqrt{d}}\times\frac{B\sqrt{a}-c\sqrt{d}}{B\sqrt{a}-c\sqrt{d}}=\frac{A\left(B\sqrt{a}-c\sqrt{d}\right)}{\left(B\sqrt{a}\right)^2-\left(c\sqrt{d}\right)^2}=\frac{A\left(B\sqrt{a}-c\sqrt{d}\right)}{B^2a-C^2d}$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2-\sqrt{3}}{1}=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

معادلات درجه ۱ و درجه ۲ و روش حل آنها

حل معادله درجه ۱: برای حل معادله باید اعداد ثابت یک طرف و x ها در طرف دیگر باشند. با استفاده از قانون $\frac{\text{عددمعلوم}}{\text{ضریب‌مجهول}}$ می توان جواب x را پیدا کرده و معادله را حل کرد. مانند مثال

$$2x-5=0\rightarrow 2x=5\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

$$-3x-4=0\Rightarrow -3x=4\Rightarrow x=\frac{4}{-3}$$

$$3x-4=5+2x\Rightarrow 3x-2x=5+4\Rightarrow x=9$$

نکته ۱: اگر عددی از یک طرف تساوی به طرف دیگر برود علامت آن عوض می شود.

نکته ۲: در تقسیم کردن برای بدست آوردن جواب x، علامت ضریب xتغییر نمی کند.

حل معادله درجه ۲:

به معادله ای که بزرگترین توان x در آن ۲ باشد و به فرم $ax^2+bx+c=0$نشان می دهند یکی از روش های حل معادله درجه ۲ روش دلتا (Δ) می باشد که فرمول آن به صورت زیر است:

$$\Delta=b^2-(4\times a\times c)$$

اگر $\Delta>0$دو جواب داریم $\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

.است مضاعف ریشه که جواب یک فقط$\Delta=0$ اگر $\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}$

معادله جواب ندارد $\Rightarrow$ اگر$\Delta<0$

مثال: معادله $x^2-3x+2=0$ را حل کنید.

$a=1 \quad b=-3 \quad c=2$

پس دو جواب داریم

$\Delta=(-3)^2-(4\times1\times2)=9-8=1>0$

$$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3+1}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

معادله $2x^2-4x+2=0$ را حل کنید.

سپس فقط یک جواب داریم و ریشه مضاعف خواهد بود.

$a=2 \quad b=-4 \quad c=2$

$\Delta=(-4)^2-(4\times2\times2)=16-16=0$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(2)}=\frac{4}{4}=1$$

معادله $5x^2-2x+3=0$ را حل کنید.

$a=5 \quad b=-2 \quad c=3$

$\Delta=(-2)^2-(4\times5\times3)=4-60=-56<0$

پس معادله جواب ندارد.

تذکر ۱: اگر دو یا چند پرانتز در هم ضرب شده باشند و سمت راست معادله حتماً صفر باشد برای حل معادله می توان پرانتزها را جداگانه مساوی صفر قرار داده و معادله را حل می کنیم.

$$x(x-1)(2x-3)(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1 \Rightarrow x=1 \\ 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \\ x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

تذکر ۲: هرگاه در حل معادله ها به رابطه $x^2=a^2$ رسیدیم برای حل آن داریم.

بسیار مهم : $x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$

$x^2=4=2^2 \Rightarrow x^2=2^2 \Rightarrow x=\pm 2$

$x^2=25=5^2 \Rightarrow x^2=5^2 \Rightarrow x=\pm 5$

تذکر۳: هرگاه در حل نامعادله به رابطه های زیر رسیدیم به صورت زیر عمل می کنیم.

بسیار مهم:

$x^2<a^2 \Rightarrow -a<x<a$ $\qquad$ $x^2>a^2 \Rightarrow x>a \quad a<-x$

$x^2<4 \Rightarrow -2<x<2$ $\qquad$ $x^2>25 \Rightarrow x>5 \quad x<-5$

$x^2<9 \Rightarrow -3<x<3$ $\qquad$ $x^2>16 \Rightarrow x>4 \quad x<-4$

تذکر ۴: اگر در یک طرف معادله xزیر رادیکال باشند برای حل معادله و بدست آوردن جواب xباید دو طرف معادله را به توان فرجه رادیکال برسانیم که رادیکال حذف شود مانند

مثال ۱- $\sqrt{x-1}=2$ به توان ۲ میرسانیم $\rightarrow x-1=2^2=4 \Rightarrow x=4+1=5$

مثال ۲- $\sqrt[3]{2x-3}=1 \rightarrow 2x-3=1^3 \Rightarrow 2x-3=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\dfrac{4}{2}=2$

مثال ۳- $3\sqrt{4x}-1=0 \Rightarrow 3\sqrt{4x}=1 \Rightarrow \sqrt{4x}=\frac{1}{3} \Rightarrow 4x=(\frac{1}{3})^2 \Rightarrow 4x=\frac{1}{9} \Rightarrow x=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{1}}=\frac{1}{36}$

تذکر ۵: بعضی مواقع با استفاده از اتحادها (اتحاد جمله مشترک و مزدوج) می توان معادله درجه ۲ را حل کرد در مثال۱ $x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$ اتحادجمله مشترک بایددوعددپیداکنیم که ضربشان۳-وجمعشان۲-شود

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 & -3\times 1=-3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 & -3+1=-2 \end{cases}$$

مثال ۲-

$x^2+1x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0$

باید دو عدد کنیم که ضربشان ۶- و جمعشان ۱+ شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 & (+3)\times(-2)=-6 \\ x-1=0 \Rightarrow x=2 & (+3)+(-2)=+1 \end{cases}$$

مثال۳-

$x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad , \quad x+2=0 \Rightarrow x=-2$

اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

معرفی فاصله ها و انواع آن

۱-فاصله بسته $a \le x \le b \Rightarrow [a,b]$

۲-فاصله باز $a < x < b \Rightarrow (a,b)$

۳-فاصله نیم باز (نیم بسته) $a < x \le b = (a,b]$ ، $a \le x < b = [a,b)$

۴-اعداد بزرگتر (بزرگتر مساوی) عدد $x > a = (a,+\infty)$ ، $x \ge a = [a,+\infty)$

۵-اعداد کوچکتر (کوچکتر مساوی) عدد $x < a = (-\infty,a)$ ، $x \le a = (-\infty,a]$

تعیین علامت عبارت های درجه ۱ و درجه ۲

ابتدا عبارت ها را مساوی صفر قرار داده و ریشه های معادله را بدست می آوریم. سپس با استفاده از جدول های زیر معادله ها را تعیین علامت می کنیم. منظور از تعیین علامت پیدا کردن فاصله های است که علامت عبارت ها در آن فاصله ها + یا − باشند.

$ax+b=0 \Rightarrow ax=-b$

$x=\frac{-b}{a}$

الف) عبارت درجه ۱

$+\infty$

	$-\infty$ $\frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax+b	مخالف ضریبx	موافق ضریبx

— — —

دست راست موافق علامت ضریب xیعنی a

دست چپ مخالف علامت ضریب xیعنی b

مثال : $-6x+3=0 \Rightarrow -6x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$

دست راست موافق علامت ضریب xیعنی ۶−

	$-\infty$ $\frac{1}{2}$	$+\infty$
-6x+3	+	−

دست چپ مخالف علامت xیعنی ۶−

ب) عبارت درجه ۲ ax^2 +bx+c

اگر $\Delta>C$ یعنی معادله دو جواب داشته باشد.

	$-\infty$ $\qquad x_1$	x_2	$-\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت x^2	مخالف علامت x^2	موافق علامت x^2

دست راست موافق علامت ضریب x^2 یعنی a

بین دوریشه مخالف علامت ضریب x^2 یعنی a

دست چپ موافق علامت ضریب x^2 یعنی a

هرگاه $\Delta=C$ یا $\Delta<C$ باشد یعنی در حالتی که معادله درجه ۲ جواب ندارد یا فقط یک جواب دارد در هر دو طرف را موافق علامت x^2 می گیریم.

موافق علامت ضریب x^2

	$-\infty$	x $\qquad +\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت x^2	موافق علامت x^2

دست راست موافق علامت ضریب x^2

دست چپ موافق علامت ضریب x^2

مثال: عبارت $2x^2-x$ را تعیین علامت کنید.

	$-\infty$ $\qquad 0$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x^2-x$	+	−	+

$$2x-x=0 \Rightarrow x(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

تذکر: اگر معادله داده شده کسری باشد صورت و مخرج کسر را جداگانه مساوی صفر قرار داده و ریشه های آن ها را بدست می آوریم سپس در جدول معادله صورت و مخرج را جداگانه تعیین علامت کرده و سطر آخر جدول را حاصلضرب علاکت ها در نظر می گیریم مانند

مثال: عبارت $\frac{x+1}{x-1}$ تعیین علامت کنید.

	$-\infty$	-1	$+1$ $+\infty$
X+1	$-$	$+$	$+$
x-1	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	$-$	$+$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$, $x-1=0 \Rightarrow x=1$

مثلثات:

زاویه ها در مثلثات بر حسب درجه یا رادیان بیان می شود. برای تبدیل یک زاویه بر حسب درجه به رادیان از فرمول $\frac{\text{زاویه}\times\pi}{180}$ استفاده می کنیم مثلاً زاویه 30 را می خواهیم به رادیان بیان کنیم $\frac{30\times\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$ و یا زاویه 45° برابر است با $\frac{45\times\pi}{180}=\frac{\pi}{4}$ و زاویه های مهم بر حسب رادیان برابر است با

۳۶۰	۲۷۰	۱۸۰	۹۰	۶۰	۴۵	۳۰	۰	درجه
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	

رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

تذکر: اگر زاویه ای را بر حسب رادیان داشته باشیم و بخواهیم بدانیم این زاویه چند درجه است کافی است به جای π مقدار ۱۸۰ را قرار دهیم و کسر را ساده کرده.

$$\frac{3\pi}{4} \to \frac{3\times180}{4} = 135^\circ$$

نسبت های مثلثاتی:

$$\cot gx = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan x \times \cot gx = 1 \quad ....$$

توجه مهم: در دایره مثلثاتی محور عمودی یعنی محور y ها را محور sin ها و محور x ها را محور cos قرار می دهیم.

تعیین علامت نسبت های مثلثاتی برای تعین علامت می دانیم محور x ها، محور cos و محور yها، محور sin هاست مثلاً در ربع دوم چون x ها منفی هندسی cos منفی و چون y ها مثبت هستند پس sin مثبت است و برای cot, tan هم از ضرب علامت های sin در cos استفاده می شود و تعبیه ربع ها هم به همین صورت پیدا می کنیم.

ربع اول	ربع دوم
$\sin +$	$\sin +$
$\cos +$	$\cos -$
$\tan +$	$\tan -$
$\cot +$	$\cot -$

$\sin -$ $\cos -$ $\tan +$ $\cot +$ ربع سوم	$\sin -$ $\cos +$ $\tan -$ $\cot -$ ربع چهارم

نمایش زاویه های ۰ و ۹۰و ۱۸۰و ۲۷۰و۳۶۰ در دایره مثلثاتی جهت دایره مثلثاتی در جهت عقربه های ساعت است.

توان های نسبتهای مثلثاتی:

$\sin^n x = (\sin x)^n \quad \tan^n x = (\tan x)^n \quad \sin^5 x = (\sin x)^5$

$\cos^n x = (\cos x)^n \quad \cot^n x = (\cot x)^n \quad \cos^3 x = (\cos x)^3$

نکته: راه تشخیص زاویه ای که بر جسب رادیان داده شده است در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می گیرد:

۱-اگر عدد صورت فقط یک واحد از عدد مخرج کمتر باشد آن زاویه در ربع دوم است مثل $\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}$

۲-اگر عدد صورت فقط یک واحد از عدد مخرج بیشتر باشد ان زاویه در بع سوم است. $\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{6}$

۳-اگر عدد صورت از دو برابر عدد مخرج یک واحد کمتر باشد آن زاویه در ربع چهارم است مثل $\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{6}$

۴-اگر بین اعداد صورت و مخرج هیچ کدام از ۳ حالت قبل اتفاق نیفتاد، اگر sin یا cos زاویه ای را خواستیم بدست آوریم باید مضارب زوج πرا از آن جدا کرده، سپس sin یا cos زایوه باقی مانده را حساب کنیم. برای cot, tan

باید مضارب فرد π را از ان جدا کرده و $\cot,\tan$ زاویه باقی مانده را حساب کنیم.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$
$$\tan\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cot\left(\frac{19\pi}{6}\right)=\cot\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی برای مضارب $\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$: برای زاویه های مثل $\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{4},\frac{5\pi}{6}$ و... به عدد صورت کسر توجهی نمی کنیم و فقط نسبت مثلثاتی خود $\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$ را بدست می آوریم البته اید توجه کرد که زاویه داده شده در چه ربعی از دایره مثلثاتی قرار می گیرد و علامت مثبت یا منفی مورد نظر را به آن بدهیم مثلاً برای بدست آوردن $\cos\frac{4\pi}{3}$، عدد ۴ صورت را در نظر نمی گیریم و فقط $\cos\frac{\pi}{3}$ را حساب می کنیم البته چون $\frac{4\pi}{3}$ در ربع سوم قرار دارد و $\cos$ در این ربع منفی است پس $\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{-1}{2}$

نکته: در زاویه های که داده می شود، اگر عدد صورت با مخرج ساده می شود ابتدا آن ها را ساده کرده سپس مقدار آن ها را بدست آورده :

$$\tan\frac{5\pi}{4}=+\tan\frac{\pi}{4}=+1$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=+\frac{1}{2}$$

نکته: در زاویه های که داده می شود اگر عدد صورت با مخرج ساده می شود ابتدا آن ها را ساده کرده سپس مقدار آن ها را بدست آورده.

$$\sin\frac{6\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$$

$$\cos\frac{8\pi}{6}=\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{-1}{2}$$

محاسبه نسبتهای مثلثاتی برای زاویه های منفی

$\sin(-x)=-\sin x \qquad \tan(-x)=-\tan x$

$\cos(-x)=\cos x \qquad \cot(-x)=-\cot x$

مثال: $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

مثال: $\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

لگاریتم و خواص آن:

اگر xیک عدد حقیقی و مثبت باشد، لگاریتم عدد x در مبنای aرا با نماد $\log_a^x$نمایش می دهند که در آن عدد a باید $(a\neq 1, a>0)$یعنی مبنا باید مثبت و مخالف عدد ۱ باشد.

خواص لگاریتم:

1) $\log_a^a=1$ لگاریتم هر عدد در مبنای خودش برابر ۱ است.

2) $\log_a^1=0$ لگاریتم عدد۱ در هر مبنایی برابر صفر است.

$$3)\ \log_c^{a\times b}=\log_c^a+\log_c^b \qquad 4)\ \log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b$$

$$5)\ \log_b^{a^n}=n\log_b^a \qquad 6)\ \log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$$

اگر مبنای لگاریتمی ۱۰باشد معمولاً آن را نمی نویسند.

$$7)\ \log_b^{\sqrt[n]{a^m}}=\log_b^{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{m}{n}\log_b^a \qquad 8)\ \log_{10}^a=\log a$$

تذکر: در محاسبات عدد جلوی لگاریتم و مبنا را در صورت امکان تجزیه کرده و با استفاده از خواص لگاریتم آن را ساده می کنیم.

مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt{8}}}^{\sqrt[5]{8}} = \log_{8^{\frac{-1}{2}}}^{8^{\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{-1}{2}}\log_8^8 = \frac{-2}{5}\underbrace{\log_8^8}_{1} = \frac{-2}{5}\times 1 = \frac{-2}{5}$

مثال: $\log 100 = \log 10^2 = 2\underbrace{\log 10}_{1} = 2\times 1 = 2$

معرفی عدد e (نپر) : عدد e یک عدد اعشاری است که مقدار آن برابر است با ....2/718 و در ضرب توان های عدد e و تقسیم توان های عدد e مانند ضرب و تقسیم اعداد تواندار عمل می کنیم.

$1)\ e^{\circ} = 1$ $\quad 2)\ e^{1} = e$ $\quad 3)\ e^{\frac{m}{n}} = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \left(e^{m}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^{m}}$

$4)\ e^{m}\times e^{n} = e^{m+n}$ $\quad 5)\ \frac{e^{m}}{e^{n}} = e^{m-n}$ $\quad 6)\ \left(e^{m}\right)^{n} = e^{mn}$

معرفی نماد Ln : اگر در لگاریتم مبنا عدد e قرار گیرد log تبدیل به Ln میشود.

$\log_e^x = Lnx$

$\log_e^2 = Ln2 \qquad \log_e^5 = Ln5$

خواص Ln : تمامی خاصیت های که برای log بیان شده برای Ln هم برقرار است.

$1)\ Ln1 = 0$ $\quad 2)\ Lne = 1$ $\quad 3)\ Lnx^{n} = nLnx$ $\quad 4)\ Lnxy = Lnx + Lny$

$5)\ Ln\frac{x}{y} = Lnx - Lny$

تابع:

هر رابطه بین x و y را یک تابع گویند اگر وقتی برای x یک عدد انتخاب کردیم بعد از جایگذاری x برای y هم

یک عدد بدست آید نه بیشتر. در حالت کلی یک تابع را با نماد $y=f(x)$ نشان می دهند که در آن x همان طول نقطه و y همان عرض نقطه می باشد.

انواع تابع و محاسبه مقدار تابع یا همان y از روی x

۱-تابع چند جمله ای: تابعی است که اولاً تعداد جملات آن حداقل یکی باشد ثانیاً توان x فقط اعداد طبیعی باشد مانند $y=x^3+4x^2+10x$ یا $y=x-1$ یا $y=5x$ یا $y=-6$ یا $y=x^2-3x+1$

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 \quad a_i\in R \quad n\in N$$

۲-تابع ثابت: $y=f(x)=k$ (k همیشه یک عدد ثابت است) مثال

$$y=f(x)=10$$

$$y=-5 \qquad y=\frac{1}{2}$$

۳- توابع مثلثاتی توابع به فرم $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و $y=\tan x$ و $y=\cot x$ و $y=\sec x$ و $y=\csc x$ می باشد.

۴-توابع لگاریتمی ($\ln$ یا $\log$) توابعی به فرم $y=\ln x$ یا $y=\log_a^x$ هستند.

۵-توابع نمایی: توابعی به فرم $y=a^x$ که در آن a عدد ثابت است مثل $y=3^x$ یا $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

محاسبه مقدار تابع در یک نقطه یا بدست آوردن همان y باید به جای x ها در تابع مورد نظر نقطه داده شده را جایگذاری کرده و y را بدست آویم اگر $x=a$ باشد مقدار تابع را با نماد $y=f(a)$ نمایش می دهند.

مثال: اگر $f(x)=x^2+x+1$ حاصل $f(2)$ را محاسبه کنید:

$f(2)=2^2+2+1=7$

مثال: اگر $y=\ln x$ باشد مقدار $f(1)+f(e^2)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} f(1)=\ln 1=0 \\ f(e)=\ln e=2\underbrace{\ln e}_{1}=2 \end{cases} \Rightarrow 2+0=2$$

مثال: اگر $f(x)=e^{\cos x}+1$ باشد مقدار $2f(0)+3f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ را بدست آورید؟

$$\begin{cases} f(0)=e^{\cos 0}+1=e^1+1=e+1 \\ f(\frac{\pi}{2})=e^{\cos\frac{\pi}{2}}=e^0+1=1+1=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2f(0)+3f(\frac{\pi}{2})=2(e+1)+3(2)=2e+2+6=2e+8$$

۶-تابع جزء صحیح: اگر x یک عدد حقیقی باشد جزء صحیح آن یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با xکه با نماد $[x]$ نشان می دهند. در واقع اگر x عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی باشد. داریم:

$n\le x\le n+1\Rightarrow [x]=n$

۱) [اعداد صحیح] =خود عدد صحیح

$$\Rightarrow [5]=5 \quad [-3]=-3 \quad [0]=0$$

۲) [عدد اعشاری و مثبت]=قسمت صحیح عدد

$$\Rightarrow [5/71]=5 \quad [1/21]=1 \quad [0/37]=0$$

۳) [عدد اعشاری و منفی]=قسمت صحیح عدد-۱

$$\Rightarrow [-4/2]=-4-1=-5 \quad [-0/5]=-0-1=-1$$

و یا برای محاسبه جزء صحیح عدد داخل براکت را بین دو عدد صحیح متوالی قرار داده و عدد کوچکتر را جواب بگیریم.

$$[0/75] = ? \quad 0 \le 0/75 < 1 \Rightarrow [0/75] = 0$$

$$[-1/6] = ? \quad -2 \le -1/6 < -1 \Rightarrow [-1/6] = -2$$

۷-توابع چند ضابطه ای: توابعی هستند که تعداد ضابطه های تابع آن از یکی بیشتر باشد در این توابع روبروی هر ضابطه دامنه تابع آن نوشته شده است مانند مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^2 + 2 & x \le 1 \end{cases}$$

محاسبه مقدار تابع در توابع چند ضابطه ای: برای پیدا کردن مقدار تابع در نقطه $x = a$ باید از روی دامنه تابع تشخیص دهیم که نقطه مورد نظر را در کدام ضابطه قرار دهیم مانند مثال:

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ x^2+2 & x \le 2 \end{cases}$ باشد مقدار $f(-2), f(0), f(3), f(2)$ را بدست آورید.

$$f(2) \longrightarrow 2^2 + 2 = 6 \qquad f(0) \longrightarrow 0^2 + 2 = 2$$

$$f(3) \longrightarrow 3+1 = 4 \qquad f(-2) \longrightarrow (-2)^2 + 2 = 6$$

۸-تابع قدر مطلق: $y = |x|$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad y = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

خواص قدر مطلق:

۱-قدر مطلق اعداد چه مثبت و چه منفی همیشه مثبت است.

$|-10| = +10 \qquad |+10| = +10$

۲- اگر $|x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a$

مثلاً $|x| \le 4 \Rightarrow -4 \le x \le 4$

۳- اگر $|x| \ge a \Rightarrow \begin{cases} x \ge a \\ x \le -a \end{cases}$

مثلاً $|x| \ge 2 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le -2 \end{cases}$

۴- اگر $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$

مثلا $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$

دامنه تابع: منظور از دامنه تابع مجموعه تمام اعدادی هستند که می توان آن ها را به جای x در تابع قرار داد و y را محاسبه کرد و با D_f نشان می دهند.

۱-اگر تابع چند جمله ای باشد دامنه تابع همیشه مجموعه اعداد حقیقی است. $D_f = R$

۲-اگر تابع کسری باشد که صورت کسر چند جمله ای باشد اعدادی که فقط مخرج کسر را صفر می کنند جزء دامنه تابع نمی باشند .

مثال: $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2-1} \quad x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ریشه های مخرج

$D_f = R - \{-1, +1\}$

$D_f = R -$ {ریشه های مخرج کسر}

۳-اگر تابع رادیکالی با فرجه زوج باشد باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار داد.

$f(x) = \sqrt{x-2} \quad x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$

۴-اگر تابع رادیکالی با فرجه فرد باشد اگر چند جمله ای زیر رادیکال باشد دامنه R خواهد بود ولی اگر کسر باشد ریشه های مخرج کسر را بدست آورده و

D_f=R-{ ریشه های مخرج }

$f(x)=\sqrt[3]{x-2} \to D_f = R$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}} \quad x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad D_f = R-\{1\}$

جدول زاویه های مهم مثلثاتی

زاویه برحسب درجه	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0	30^0	60^0	45^0

زاویه برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
sin	۰	۱	۰	۱−	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	۱	۰	۱−	۰	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	۰	تعریف نشده یا ∞	۰	تعریف نشده یا ∞	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	۱
cot	تعریف نشده یا ∞	۰	تعریف شده یا ∞	۰	تعریف نشده یا ∞	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱

فصل دوم

فرمول های مشتق قوانین مشتق گیری و دیفرانسیل تابع

مشتق و فرمول های آن

اگر $y=f(x)$ ضابطه تابع باشد مشتق تابع را با نماد $y=f(x)$ نشان می دهند. براب بدست آوردن مشتق یک تابع از فرمول های مشتق استفاده می کنیم.

مشتق تابع ثابت صفر است.

$$1)\ f(x)=k \to f'(x)=0 \qquad (k\in R)$$

$$2)\ f(x)=x^n \to f'(x)=nx^{n-1} \qquad (k\in R)$$

مثال:

$$f(x)=x^2 \to f'(x)=2x \qquad f(x)=x^{\frac{3}{2}} \to f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=x^{10} \to f'(x)=10x^9 \qquad f(x)=\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}} \to f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}$$

$$f(x)=x^{-5} \to f'(x)=-5x^{-5-1}=-5x^{-6}=\frac{-5}{x^6}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^3} \to x^{-3} \to f'(x)=-3x^{-3-1}=\frac{-3}{x^4}$$

تذکر:

$$f(x)=kx^n \to f'(x)=(nk)x^{n-1} \qquad (k\in R)$$

$$f(x)=3x^7 \to f'(x)=(3\times 7)x^6=21x^6$$

$$f(x)=6x \to f'(x)=(6\times 1)x^0=6$$

توجه: اگر $f(x)=x$ باشد مشتق ان همیشه برابر با یک است. $f(x)=x \to f'(x)=1$

مشتق توابع مثلثاتی (در فرمول های زیر u هر تابعی می تواند باشد)

در تمامی فرمول ها u ، مشتق تابع u است)

$$3)\ f(x)=\sin u \to f'(x)=u'\cos u$$

مثال:

$$f(x)=\sin x \to f'(x)=1\times\cos x=\cos x$$
$$f(x)=\sin x^5 \to f'(x)=5x^4\cos x^5$$

$$4)\ f(x)=\cos u \to f'(x)=-u'\times\sin u$$

مثال:

$$f(x)=\cos x \to f'(x)=-1\times\sin x=-\sin x$$
$$f(x)=\cos x^4 \to f'(x)=-4x^3\sin x^4$$

$$5)\ f(x)=\tan u \to f'(x)=u'\times(1+\tan^2 u)$$

مثال:

$$f(x)=\tan x \to f'(x)=1\times(1+\tan^2 x)=1+\tan^2 x$$
$$f(x)=\tan^3 x \to f'(x)=3x^2\times\left(1+\tan^2 x^3\right)$$

$$6)\ f\left(x\right)=\cot u \to f'(x)=-u'\times(1+\cot^2 u)$$

مثال:

$$f(x)=\cot x \to f'(x)=-1\times(1+\cot^2 x)=-(1+\cot^2 x)$$
$$f(x)=\cot x^5 \to f'(x)=-5x^4\times\left(1+\cot^2 x^5\right)$$

$$7)\ f(x)=\sec u \to f'(x)=u'\times\sec u\times\tan u$$

مثال:

$$f(x)=\sec x \to f'(x)=1\times\sec x\times\tan x$$
$$f(x)=\sec x^7 \to f'(x)=7x^6\times\sec x^7\times\tan x^7$$

$$8)\ f(x)=\csc u \to f'(x)=-u'\times\csc u\times\cot u$$

مثال:

$f(x)=\csc x \to f'(x)=-1\times\csc x\times\cot x$

$f(x)=\csc x^4 \to f'(x)=-4x^3\times\csc x^4\times\cot x^4$

توجه: علامت منفی در فرمول های $\csc,\cot,\cos$ فراموش نکنید.

مشتق توابع نمایی $\left(e^u,a^u\right)$

$1)\, f(x)=a^u \to f'(x)=u'\times a^u\times\ln a$

مثال:

$f\left(x\right)=2^x \to f'(x)=1\times 2^x\times\ln 2=2^x\ln 2$

$f(x)=2^{x^5} \to f'(x)=5x^4\times 2^{x^5}\ln 2$

$2)\, f(x)=e^u \to f'(x)=u'\times e^u$

مثال:

$f(x)=e^{x^4} \to f'(x)=4x^3\times e^{x^4}$

توجه: e^x تنها تابعی است که مشتق آن با خودش برابر است.

مشتق تابع لگاریتمی و $\ln$

$1)\, f(x)=\log_a^u \to f'(x)=\frac{u'}{u}\times\frac{1}{\ln a}=\frac{u'}{u\ln a}$

مثال:

$1)\, f(x)=\log_5^x \to f'(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln 5}=\frac{1}{x\ln 5}$

$f(x)=\log_3 x^7 \to f'(x)=\frac{7x^6}{x^7}\times\frac{1}{\ln 3}=\frac{7}{x^1}\times\frac{1}{\ln 3}=\frac{7}{x\ln 3}$

$2)\, f(x)=\ln u \to f'(x)=\frac{u'}{u}$

مثال:

$f(x)=\ln x^8 \to f'(x)=\frac{8x^7}{x^8}=\frac{8}{x}$

محاسبه مشتق توابع مثلثاتی در حالتی که به جای u یک تابع مثلثاتی یا نمایی یا لگاریتمی قرار گیرد.

مثال:

$$f(x)=\sin\underbrace{(\cos x)}_{u}\to f'(x)=u'.\cos u=\underbrace{-\sin x}_{u'}.\cos\left(\underbrace{\cos x}_{u}\right)$$

$$f(x)=\cos\underbrace{(\tan x)}_{u}\to f'(x)=-u'.\sin u=-(\underbrace{1+\tan^2 x}_{u'}).\sin\left(\underbrace{\tan x}_{u}\right)$$

$$f(x)=\sin\underbrace{\left(e^x\right)}_{u}\to f'(x)=u'.\cos u=\underbrace{e^x}_{u'}.\cos\left(\underbrace{\cos e^x}_{u}\right)$$

$$f(x)=\tan\underbrace{\left(\log_3^x\right)}_{u}\to f'(x)=u'.(1+\tan^2 u)=\underbrace{\frac{1}{x\ln 3}}_{u'}\times\left(1+\tan^2\underbrace{\left(\log_3^x\right)}_{u}\right)$$

محاسبه مشتق توابع لگاریتمی و $\ln$ در حالتی که به جای u، توابع مثلثاتی و لگاریتمی باشد.

مثال:

$$f(x)=\log_3\left(\underbrace{\sin x}_{u}\right)\to f'(x)=\frac{u'}{u}\times\frac{1}{\ln a}=\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\ln 3}=\frac{\cos x}{\sin x\ln 3}$$

$$f(x)=\log_5\left(\underbrace{\log_3^x}_{u}\right)\to f'(x)=\frac{u'}{u}\times\frac{1}{\ln a}=\frac{\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln 3}}{\log_3^x}\times\frac{1}{\ln 5}=\frac{\frac{1}{x\ln 3}}{\log_3^x.\ln 5}$$

$$f(x)=\ln(\sin x)\to f'(x)=\frac{u'}{u}=\frac{\cos x}{\sin x}$$

تمرین: مشتقات توابع $f(x)=\ln(\tan x), f(x)=\ln(\log_2^x)$ را بدست آورید.

مشتق توابع رادیکالی:

$$f(x)=\sqrt[n]{u^m}\to f'(x)=\frac{m.u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-m}}}.$$

(m توان تابع u و n فرجه رادیکال)

توجه: برای محاسبه u ، توان m را حذف و فقط از u مشتق می گیریم.

مثال:

$$f(x)=\sqrt[7]{x^5} \quad \begin{matrix} n=7 \\ m=5 \\ u=x \end{matrix} \rightarrow f'(x)=\frac{5\times 1}{7.\sqrt[7]{x^{7-5}}}=\frac{5}{7.\sqrt[7]{x^2}}$$

تـوجه: بـا تـوجه بـه فـرمـول بـالا مـشتق $\sqrt{x}$ همیشه بـرابـر بـا $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

مـثـال:

$$f(x)=x^{\frac{4}{9}} \rightarrow f(x)=\sqrt[9]{x^4} \rightarrow f'(x)=\frac{4\times 1}{9.\sqrt[9]{x^{9-4}}}=\frac{4}{9.\sqrt[9]{x^5}}$$

$$f(x)=\sqrt{\sin x} \quad \begin{matrix} n=2 \\ m=1 \\ u=\sin x \end{matrix} \rightarrow f'(x)=\frac{1\times \cos x}{2.\sqrt{\sin x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$f(x)=\cos \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{u} \rightarrow f'(x)=-u'.\sin u=-\underbrace{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}_{u'}.\sin \sqrt[3]{x}$$

$$f(x)=e^{\sqrt[5]{x}} \rightarrow f'(x)=u'.e^u=\frac{1}{5.\sqrt[5]{x^4}}.e^{\sqrt[5]{x}}$$

مـحـاسـبـه مـقـدار مـشـتـق تـابـع در یـک نـقـطـه مـانـنـد $x=a$

بـرای مـحـاسـبـه مـشـتـق در یـک نـقـطـه ابـتـدا مـشـتـق تـابـع را جـداگـانـه بـدسـت اورده و سـچس بـه جـای x در مـشـتـق عـدد داده شـده را قـرار دهـیـد.

تـوجه: اگـر $f(x)$ تـابـع بـاشـد نـمـاد مـشـتـق $f'(x)$ و نـمـاد مـشـتـق تـابـع در نـقـطـه $x=a$ بـرابـر $f'(a)$ است.

مـثـال۱- اگـر $f(x)=\sin x$ مـقـدار $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ چـنـد است؟

$$f'(x)=\cos x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

مـثـال ۲- اگـر $f(x)=\sin x$ بـاشـد مـقـدار $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را بـدسـت آوریـد؟

$$f'(x)=\cos x \begin{cases} \to f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \\ \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

تست: مقدار مشتق $f(x)=\cos(\sin x)$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

الف) $\frac{-1}{2}$ ب) ۱+ ج) ۰ د) $\frac{1}{2}$

حل:

$$f'(x)=-u'.\sin u=-\cos x.\sin(\sin x)\xrightarrow{x=0} f'(0)=-\cos 0.\sin\left(\underbrace{\sin 0}_{0}\right)$$

$$=-1\times\underbrace{\sin 0}_{0}=0$$

گزینه ج صحیح است.

تست: اگر $f(x)=\ln(\cos x)$ باشد مقدار $f'(0)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱- ج) ۱ د) ۲

حل:

$$f'(x)=\frac{u'}{u}=\frac{-\sin x}{\cos x}\Rightarrow f'(0)=\frac{-\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

گزینه ب صحیح است.

تست: اگر $f(x)=\log_2(\ln x)$ باشد حاصل $\frac{f'(e)}{f(e)+1}$ کدام است؟

الف) $e\ln 2$ ب) $\ln 2$ ج) $\frac{1}{e\ln 2}$ د) e

حل: $f(x)$ مقدار تابع در نقطه e، $f'(e)$ مقدار مشتق تابع در نقطه e

$$f'(x)=\frac{u'}{u}\times\frac{1}{\ln a}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\times\frac{1}{\ln 2}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x.\ln 2}\rightarrow f'(e)=\frac{\frac{1}{e}}{\ln e.\ln 2}=\frac{\frac{1}{e}}{\ln 2}$$

$$f(e)=\log_2\left(\underbrace{\ln e}_{1}\right)=\log_2^1=0$$

$$\Rightarrow\frac{f'(e)}{f(e)+1}=\frac{\frac{\frac{1}{e}}{\ln 2}}{0+1}=\frac{1}{e\ln 2}$$

گزینه ج صحیح است.

قوانین مشتق گیری

۱-قانون جمع و منها در مشتق (برای محاسبه از هر تابع جداگانه $(f\pm g)'=f'\pm g'$ مشتق می گیریم.)

تست: اگر $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+x$ باشد مقدار $\frac{f'(1)}{f(1)}$ کدام است؟

الف) $\frac{18}{11}$ ب) $\frac{33}{6}$ ج) $\frac{6}{33}$ د) $\frac{11}{18}$

حل:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+1\rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1=\frac{11}{6}$$

$$f(1)=3\Rightarrow\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{\frac{11}{6}}{3}=\frac{11}{8}$$

گزینه ج صحیح است.

۲-قانون ضرب دو تابع $(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$

مثال

$$f(x)=\underset{f}{\sin x}.\underset{g}{\cos x}\to f'(x)=\underset{f'}{\cos x}.\underset{g}{\cos x}+\underset{g'}{(-\sin x)}.\underset{f}{\sin x}$$
$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$

توجه: اگر عددی در تابعی ضرب شده از قانون ضرب ها کاسته می شود بلکه فقط از تابع مشتق گرفته و دو عدد ضرب می کنیم.

مثال: $f(x)=10\sin x\to f(x)'=10\cos x$

۳-قانون تقسیم

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$$

توجه ۱-دو قانون مشتق تقسیم، همیشه اول از صورت کسر مشتق بگیرید.

تست ۱- اگر $f(x)=\frac{x^2}{\sin x}$ مقدار $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

الف) π ب) 2π ج) $\frac{3\pi}{2}$ د) $\frac{\pi}{2}$

حل: $$f'(x)=\frac{2x\sin x-\cos x\times x^2}{(\sin x)^2}\to f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\times\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\overset{0}{\cos}\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}=\pi$$

گزینه الف صحیح است.

تست ۲: مشتق $\sqrt{3+2f(x)}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{2\sqrt{3+2f(x)}}$ ب) $\frac{f'(x)}{2\sqrt{3+2f(x)}}$ ج) $\frac{f'(x)}{\sqrt{3+2f(x)}}$ د) $\frac{2f'(x)}{\sqrt{3+2f(x)}}$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$f(x)=\sqrt{u}\to f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{2f'(x)}{2\sqrt{3+2f(x)}}=\frac{f'(x)}{\sqrt{3+2f(x)}}$$

تست۳: اگر $f(4)=-3,\ f'(4)=-5,\ g(x)=\frac{f(x)}{x}$ باشد، در این صورت $g'(4)$ کدام است؟

الف) $\frac{5}{16}$ ب) $\frac{-3}{17}$ ج) $\frac{-17}{16}$ د) $\frac{3}{17}$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{f'(x)\times x-1\times f(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow g'(4)=\frac{f'(4)\times 4-1\times f(4)}{4^2}=\frac{-5\times 4-1\times(-3)}{4^2}=\frac{-20+3}{16}=\frac{-17}{16}$$

حل: گزینه ج صحیح است.

تست۴- مشتق تابع $f(x)=\tan(\sin 2x)$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

حل: گزینه ج صحیح است.

$$f(x)=\tan u\rightarrow f'(x)=u'\times(1+\tan^2 u)$$

$$\rightarrow f'(x)=2\cos 2x\times(1+\tan^2(\sin 2x))\xrightarrow{x=0} f'(0)=2$$

۴-قانون عبارت های توان دار

اگر تابعی توان دار باشد برای محاسبه مشتق از رابطه $f(x)=(u)^n\rightarrow f'(x)=n\times u'\times(u)^{n-1}$ استفاده می شود.

مثال:

$$f(x)=\sin^5 \underset{u}{x}\xrightarrow{(\sin x)^5} f'(x)=5\times\underset{u'}{\cos x}\times\sin^4 x$$

$$f(x)=\underbrace{(x-2x+1)}_{u}^{10}\rightarrow f'(x)=10\times\left(\underset{u'}{2x-2}\right)\times\left(x^2-2x+1\right)^9$$

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{2x^2}\rightarrow f'(x)=\frac{2(2)(2x-1)\times 2x^2-4x(2x-1)^2}{(2x^2)^2}=\frac{2x-1}{x^3}$$

مثال: اگر $f(x)=\ln^2(\sin x)$ مقدار $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را بدست آورید.

$$f(x)=\ln^2(\sin x)=\left(\ln(\sin x)\right)^2 \to f'(x)=2\times\frac{\cos x}{\sin x}\times\ln(\sin x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\times\ln(\sin\frac{\pi}{4})=2\left(\ln\sqrt{2}-\ln 2\right)$$

تمرین: مشتق توابع $\sin x^5,\sin^5 x$ را جداگانه بدست آورید و با هم مقایسه کنید.؟

حدها و رابطه هایی که معنی مشتق می دهند:

مفهوم و معرفی نماد حد: حد تابع را در نقطه $x=a$ با نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ نشان می دهند به عنوان مثال وقتی گفته می شود که $\lim_{x\to 2} f(x)=5$ بدین معنی است که مقدار تابع وقتی x آن به عدد ۲ نزدیک می شود به عدد ۵ نزدیک می شود. در واقع عدد ۵ مقفدار واقعی تابع $f(x)$ در نقطه ۲ نمی باشد. برای محاسبه چنین حدهایی به جای محاسبه حد ابتدا عدد $x=a$ و تابع $f(x)$ را پیدا کرده سپس از تابع مشتق گرفته و به جای xمشتق تابع عدد a قرار دهید.

رابطه ها

$$1)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

تست: اگر $f(x)=x\sin x$ باشد حاصل $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$ کدام است؟

الف) ۰ ب) π ج) $-\pi$ د) ۱

حل: طبقه رابطه ۱ به جای این حد می توان از تابع مشتق گرفته و نقطه $x=\pi$ را به جای x های مشتق قرار دهیم.

$$f(x)=x\sin x \to f'(x)=1\times \sin x+\cos x\times x$$
$$f'(\pi)=\sin \pi+\cos \pi\times \pi=-\pi$$

گزینه ج صحیح است.

$$2)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

تست : اگر $f(x)=x^2e^x$ باشد مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

الف) e ب) $2e$ ج) $3e$ د) $4e$

حل گزینه ج صحیح است.

$$f(x)=x^2e^x \to f'(x)=2xe^x+e^x\times x^2$$
$$f'(1)=2e+e=3e$$

$$3)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+bh)-f(a+ch)}{h}=(b-c)\times f'(a)$$

تست: اگر $f(x)=\sin^2 2x$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{8}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{8}-3h\right)}{h}$ کدام است؟

الف) ۵- ب) ۵ ج) ۱۰ د) ۱۰-

حل: گزینه صحیح است

$$f(x)=\sin^2 2x=\left(\sin 2x\right)^2 \to f'(x)=2\times(2\cos 2x)\sin 2x$$
$$a=\frac{\pi}{8}\quad b=2\quad c=-3 \Rightarrow (b-c)f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=5\times 2\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$$

تذکر۱- در رابطه ۳ ممکن است به جای a متغیر x باشد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+bh)-f(x+ch)}{h}=(b-c)\times f'(x)$$

مثال: حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-f(x+h)}{h}$ اگر $f(x)=x\ln x$ کدام است؟

$$f'(x)=1\times\ln x+\frac{1}{x}\times x=\ln x+1$$
$$b=-2\quad c=+1$$
$$f'(x)(b-c)=-3(\ln x+1)=-3\ln x-3$$

نکات مهم در مورد مشتق گیری

۱-بعضی مواقع برای محاسبه مشتق از $\ln$ بهتر است ابتدا با استفاده از خواص $\ln$ تابع را ساده کرده و سپس از قانون $\frac{u'}{u}$ مشتق را بدست آوریم.

تست: اگر $f(x)=\ln\frac{x^3\sqrt{x}}{(x^2+1)^3}$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟

الف) $3\ln 2$ ب) $-3\ln 2$ ج) ۲ د) $\frac{1}{2}$

خواص $\ln$

$$\boxed{\begin{aligned}&\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b\\&\ln ab=\ln a+\ln b\\&\ln a^n=n\ln a\end{aligned}}$$

حل:

$$f(x)=\ln x^3\sqrt{x}-\ln(x^2+1)^3=\ln x^3+\ln\sqrt{x}-3\ln(x^2+1)$$
$$=3\ln x+\frac{1}{2}\ln x-3\ln(x^2+1)\Rightarrow f'(x)\frac{3}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}-3\frac{2x}{x^2+1}$$
$$\Rightarrow f'(1)=3+\frac{1}{2}-\frac{6}{2}=\frac{1}{2}$$

گزینه د صحیح است.

۲-اگر دو یا چند تابع در هم ضرب یا تقسیم شده باشند و بخواهیم مقدار مشتق را در نقطه مانند a بدست آوریم

به شرطی که عدد a یکی از عبارت ها را صفر کند برای محاسبه مشتق کافی است فقط از عبارتی مشتق بگیریم که عدد a آن را صفر می کند و بقیه عبارت ها را بدون انکه مشتق بگیریم فقط مقدار a را در آنها جایگذاری کرده

مثال: اگر $f(x)=\dfrac{\sin x\,(2+\cos x)^2}{2-\cos x}$ باشد $f'(\pi)$ کدام است؟

$$\sin\pi=0\to f'(x)=\cos x\to f'(\pi)=\frac{\cos\pi\,(2+\cos\pi)^2}{2-\cos\pi}=\frac{-1}{3}$$

تست: اگر $f(x)=\dfrac{x(2x-1)(3x-3)}{(x+2)(2x-3)}$ باشد حاصل $f'(1)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۱- ج) ۲ د) ۲-

حل: چون $x=1$ فقط عبارت $3x-3$ را صفر می کند سپس فقط مشتق $3x-3$ را بدست می آوریم و بقیه را دست نمی زنیم.

$$3x-3\xrightarrow{x=1}3(1)-3=0\to f'(x)=3\Rightarrow f'(1)=\frac{1(2(1)-1)\times 3}{(1+2)(2(1)-3)}=\frac{3}{-3}=-1$$

۳-حدهایی هستند که مقدار جایگذاری عدد به جای x در جلوی حد صورت و مخرج کسر همزمان صفر می شود در این حالت برای محاسبه جواب حد از قانون زیر استفاده می کنیم، سپس مقدار a را به جای متغیر xدر صورت و مخرج جایگذاری کرده، اگر جواب صورت و مخرج هر دو صفرشد، دوباره می توان از قانون ۱ استفاده کرده و از صورت و مخرج دوباره مشتق گرفته و اینکار تا جایی ادامه پیدا می کند که هر دو صفر نشوند و حاصل یک عدد بدست آید.

قانون ۱: $\lim_{x\to a}\dfrac{\text{مشتق صورت نسبت به } x}{\text{مشتق مخرج نسبت به } x}$

تست: اگر f تابعی مشتق پذیر باشد حاصل $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ کدام است؟

الف) $f(a)+af'(a)$ ب) $af'(a)$ ج) $f(a)-af'(a)$ د) $f'(a)-af(a)$

حل: اگر بجای x در حد مقدار a را قرار دهیم حاصل صورت و مخرج هر دو صفر می شود و می توان از قانون ۱ استفاده کرد.

گزینه ج صحیح است.

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\frac{af(a)-af(a)}{a-a}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{قانون}}\lim_{x\to a}\frac{f(a)-af'(x)}{1}=\frac{f(a)-af'(a)}{1}=f(a)-af'(a)$$

قانون مشتق توابع مرکب

اگر f و g دو تابع دلخواه باشند می توان f و g را با هم ترکیب و تابع جدید بوجود آورد. ترکیب دو تابع را با علامت $(fog)(x)$ با $(gof)(x)$ نمایش می دهند و به صورت زیر نوشته می شود.

$$(fog)(x)=f(g(x)) \qquad (gof)(x)=g(f(x))$$

محاسبه مشتق fog, gof

$$(fog(x))'=(f(g(x)))'=g'(x)\times f'(g(x))$$

$$(gof(x))'=(g(f(x)))'=f'(x)\times g'(f(x))$$

تست: اگر $g(x)=f(ax), a\neq 0$ و $g'(0)=2$ باشد، آنگاه $f'(0)$ کدام است؟

الف) a ب) $2a$ ج) $\frac{2}{a}$ د) $-a$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$g(x)=f(a(x))\to g'(x)=af'(ax)$$

$$\xrightarrow{x=0} g'(0)=af'(0)\Rightarrow 2=af'(0)\Rightarrow f'(0)=\frac{2}{a}$$

دیفرانسیل یک تابع و کاربرد آن

اگر $y=f(x)$ یک تابع دلخواه باشد دیفرانسیل تابع را با نماد dy یا dfنشان می دهند. در واقع دیفرانسیل یک تابع dy تغییرات تابع را به ازاء تغییرات $x(dx)$ در دامنه تابع نشان می دهند. در ریاضی از مفهوم دیفرانسیل در مفاهیم انتگرال و حل معادلات دیفرانسیل و... استفاده می شود.

محاسبه دیفرانسیل تابع

وقتی گفته می شود $y'=f'(x)$ در واقع از تابع f نسبت به x مشتق گرفته می شود حال اگر مشتق تابع را نسبت به x با علامت $\frac{d}{dx}$ نشان دهیم داریم: $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}\to dy=f'(x)dx$

در واقع برای محاسبه دیفرانسیل تابع باید مشتق تابع را در dx ضرب کنیم.

مثال: دیفرانسیل تابع $f(x)=x^2e^x$ را بدست آورید.

$$f'(x)=2xe^x+e^x\times x^2\Rightarrow dy=\left(2xe^x+x^2e^x\right)dx$$

توجه: می توان dyرا به صورت عدد محاسبه کرد البته به شرط آنکه $x=a$ و مقدار dxداده شده باشند

مثال: اگر $f(x)=\left(x^2+2x\right)^2$ باشد مقدار دیفرانسیل تابع در نقطه$x=1$ و به ازای $dx=0/02$بدست آورید؟

$$f'(x)=2\times(2x+2)\times(x^2+2x)\Rightarrow$$
$$f'(1)=2\times(2+2)\times(1^2+2)=24\Rightarrow$$
$$dy=f'(1)\times dx=24\times 0/02=0/48$$

محاسبه Δy : در واقع Δy نیز همان تغییرا تابع به ازا تغییرات x یعنی Δx است که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f(x)$$

توجه: مقدار Δy و Δx از لحاظ عددی بهم نزدیک هستند مانند مثال زیر:

مثال: اگر $f(x) = x^3 - 2x$ باشد مقدار Δy و Δx را به ازاء $x = -1$ ، $\Delta x = dx = 0/01,$ بدست آورید؟

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow dy = f'(-1) \times dx = 1 \times 0/01 = 0/01$$
$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f(x) = f\left(-1 + 0/01\right) - f(-1) = f(-0/99) - 1 = 0/01$$

کاربرد دیفرانسیل: یکی ازکاربردهای مهم دیفرانسیل بدست آوردن مقدار تقریبی می باشد.

روش محاسبه مقدار تقریبی را در مثال زیر توضیح می دهیم.

$$y_2 = dy + y_1$$

مثال: مقدار تقریبی عدد $\sqrt[3]{8/3}$ را به کمک دیفرانسیل پیدا کنید؟

۱-پیدا کردن تابع: عدد زیر رادیکال را حذف و به جای آن قرار دهید تا تابع پیدا شود. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

۲-پیدا کردن نقطه: برای پیدا کردن نقطه باید عددی را پیدا کنیم که به عدد زیر رادیکال نزدیک باشد در ضمن فرجه سوم را می دانیم $x = 8$

۳-پیدا کردن dx

عدد جدید بدست آمده- عدد اصلی زیر رادیکال= dx

۸/۳-۸=۰/۳

۴-محاسبه y_1 $y_1=f$ (جدید x)

$$f(8)=\sqrt[3]{8}=2$$

۵-محاسبه dy

$$dy=f'(x)dx=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx\frac{x=8}{dx=0/3}\rightarrow dy=\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}\times 0/3=\frac{1}{12}\times 0/3=\frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow y_2=dy+y_1=\frac{1}{40}+2$$

مثال: مقدار تقریبی $\sin 35^\circ$ را بدست آورید؟

$$y_2=dy+y_1$$

$$f(x)=\sin x \qquad x=30 \qquad dx=35-30=5^\circ$$

بهتر است در محاسبات 5° بر حسب رادیان نوشته شود

$$dy=f'(x)dx=\cos x\times dx=\cos 30\times 5$$

$$30^\circ=\frac{\pi}{6} \qquad \frac{5\times\pi}{180}=\frac{\pi}{36}$$

$$\Rightarrow dy=\cos\frac{\pi}{6}\times\frac{\pi}{36}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{36}=\frac{\sqrt{3}\pi}{72}$$

$$y_1=f(30)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_2=dy+y_1=\frac{\sqrt{3}\pi}{72}+\frac{1}{2}\xrightarrow{\pi\approx 3/14}\frac{7}{100}+\frac{1}{2}=0/57$$

تست۱: مقدار تقریبی $\sqrt[4]{15/9}$ کدام است؟

الف) $2+\frac{1}{32}$ ب) $2-\frac{1}{32}$ ج) $2+\frac{1}{320}$ د) $2-\frac{1}{320}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$f(x)=\sqrt[4]{x} \qquad x=16 \qquad dx=15/9-16=-0/1$$

$$dy=f'(x)dx=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\times dx\frac{x=16}{dx=-0/1}\rightarrow dy=\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}\times -0/1=\frac{-0/1}{32}=\frac{-1}{320}$$

$$y_1=f(16)=\sqrt[4]{16}=2\Rightarrow y_2=dy+y_1=\frac{-1}{320}+2$$

تست ۲ : اگر $f(0)=0$ ، $f(x)=\sin(4x-f(x))$ باشد آن گاه $f'(0)$ کدام است؟

الف) ۲−   ب) $\frac{-1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) ۲

حل: گزینه د صحیح است.

$$f(x)=\sin(4x-f(x)) \to f'(x)=\left(4-f'(x)\right).\cos\left(4x-f(x)\right)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0)=\left(4-f'(0)\right).\cos\left(0-f(0)\right) \Rightarrow f'(0)=\left(4-f'(0)\right)\times 1$$

$$\Rightarrow f'(0)=4-f'(0) \Rightarrow f'(0)+f'(0)=4 \Rightarrow 2f'(0)=4 \Rightarrow f'(0)=\frac{4}{2}=2$$

فصل سوم

مشتق مراتب بالاتر- انواع مشتق ضمنی و پارامتری مشتق وارون تابع معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی f^{-1}, f

محاسبه مشتق مراتب بالاتر

اگر از مشتق تابع $y = f(x)$ یعنی $y' = f'(x)$ دو یا چند بار متوالی مشتق بگیریم، مشتق مراتب بالاتر بدست می آید.

مشتق دوم $f''(x) \rightarrow$ مشتق سوم $f'''(x) = f^{(3)}(x) \rightarrow$ .... مشتق مرتبه n ام $f^{n}(x)$

تست: اگر $f(x) = x + xe^{x}$ باشد حاصل $\frac{f'(1)}{f''(1)}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{3e}$ ب) $\frac{1}{3e} - \frac{2}{3}$ ج) $\frac{1}{3e} + \frac{2}{3}$ د) $\frac{-1}{3e} + \frac{2}{3}$

حل**:** گزینه ج صحیح است.

$$f(x) = x + xe^{x} \rightarrow f'(x) = 1 + e^{x} + xe^{x} \Rightarrow f''(x) = e^{x} + e^{x} + xe^{x}$$

$$\begin{cases} f'(1) = 1 + e^{1} + 1e^{1} = 1 + 2e \\ f''(1) = e^{1} + e^{1} + 1e^{1} = 3e \end{cases} \Rightarrow \frac{f'(1)}{f''(1)} = \frac{1+2e}{3e} = \frac{1}{3e} + \frac{2}{3}$$

محاسبه مشتق مرتبه n :

در حالت کلی محاسبه مشتق مرتبه n برای توابع مختلف مشکل است اما در تست ها می توان به n اعداد ۱، ۲ یا ۳ را داد و مشتقات اول، دوم و سوم را بدست آورد و گزینه صحیح را پیدا کنید.

نکته: (معرفی نماد فاکتوریل برای یک عدد)

فاکتوریل**:** اگر $n \in N$ عدد طبیعی باشد داریم

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\times\ldots\times 2\times 1$$
$$3! = 3\times 2\times 1 = 6$$
$$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$
$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

اعداد منفی فاکتوریل ندارند.

تست: اگر $y=\ln x$ باشد مشتق مرتبه n ام آن کدام است؟

الف) $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!x}$ ب) $y^{(n)}=\dfrac{n-1}{x^{n}}$

ج) $y^{(n)}=\dfrac{1}{(n-1)!x^{n}}$ د) $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^{n}}$

حل: $n=1$ یعنی مشتق اول پس $y=\ln x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{x}$ حالا در بین گزینه ها $n=1$ قرار می دهیم

هر کدام که $\dfrac{1}{x}$ را ندهد جواب نیست و آن را حذف می کنیم.

فقط گزینه ب حذف می شود.

√الف) $y'=\dfrac{(-1)^{1+1}}{1!x^{1}}=\dfrac{1}{x}$

×ب) $y'=\dfrac{1-1}{x^{1}}=\dfrac{0}{x}=0$

√ج) $y'=\dfrac{1}{(1-1)!x^{1}}=\dfrac{1}{x}$

√د) $y'=\dfrac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{x^{1}}=\dfrac{1}{x}$

بار دیگر برای انتخاب ۳ گزینه دیگر $n=2$ یعنی مشتق دوم می گیریم. $y=\ln x\to y'=\dfrac{1}{x}\to y''=\dfrac{-1}{x^{2}}$

این بار در سه گزینه باقی مانده $n=2$ قرار داده

الف) $y''=\frac{(-1)^{2+1}}{2!x}=\frac{-1}{2x}$

ج) $y''=\frac{-1}{(2-1)!x^2}=\frac{1}{x^2}$

د) $y''=\frac{(-1)^{2+1}(2-1)!}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$

و تنها گزینه ای که $\frac{-1}{x^2}$ را می دهد گزینه د خواهد بود.

توجه: اگر بخواهیم مشتق مرتبه n را در یک نقطه مانند $x=a$ بدست آوریم باید بعد از دو یا سه بار مشتق گیری عدد داده شده را به جای x در مشتق قرار داد.

تست: اگر $y=\frac{x}{1+x}$ باشد مقدار مشتق مرتبه n در $x=0$ ؟

الف) $(-1)^n n$ ب) $(-1)^{n-1}n$ ج) $(-1)^n n!$ د) $(-1)^{n-1}n!$

حل: اگر $n=1$ یعنی از تابع مشتق اول را بگیریم

$$y=\frac{x}{1+x}\rightarrow y'=\frac{1}{(1+x)^2}\xrightarrow{x=0}y'=1$$

حال در گزینه ها به جای $n=1$ قرار می دهیم هر کدام که ۱ را ندهد حذف می شود.

الف) $(-1)^n n\xrightarrow{n=1}-1$ ب) $(-1)^{n-1}n\xrightarrow{n=1}1$ ج) $(-1)^n n!\xrightarrow{n=1}-1$

د) $(-1)^{n-1}n!\xrightarrow{n=1}1$

گزینه الف و ج حذف می شود و برای انتخاب گزینه صحیح بین ب و د این بار $n=2$ یعنی از تابع مشتق دوم می گیریم.

$$y=\frac{x}{1+x}\rightarrow y'=\frac{1}{(1+x)^2}\Rightarrow y''=\frac{-2}{(1+x)^3}\xrightarrow{x=0}y''=\frac{-2}{(1+0)^3}=-2$$

و در گزینه ب و د $n=2$ قرار داده و هر دو گزینه ۲- را می دهد.

$(-1)^{n-1}n \xrightarrow{n=2} -2$ (ب

$(-1)^{n-1}n! \xrightarrow{n=2} -2$ (د

و باز دوبار $n=3$ یعنی از تابع مشتق سوم را می گیریم. $y''' = y^{(3)} = \dfrac{6}{(1+x)^4} \xrightarrow{x=0} 6$

و دوباره در گزینه ب و ج $n=3$ را قرار می دهیم و گزینه د صحیح است.

$(-1)^{n-1}n \xrightarrow{n=3} 3$ (ب

$(-1)^{n-1}n! \xrightarrow{n=3} 3! = 6$ (د

محاسبه مشتق ضمنی

یکی دیگر از انواع مشتق گیری به روش ضمنی است و با نماد $\dfrac{dy}{dx}$ یا y'_x نشان می دهند.

موارد استفاده از مشتق گیری ضمنی:

۱- متغیر y در مساله توان دار باشد مثل $(\dots, y^{10}, y^5)$ و حتی به صورت $\sqrt[n]{y^m}$ که می توان به صورت توان کسری نوشت

۲-متغیر yجلوی نسبت های مثلثاتی $\csc y, \sec y, \cot y, \tan y, \cos y, \sin y$ باشد.

۳-متغیر yدرتوان تابع نمایی یادرجلوی $\ln$ باشد $(\ln y, e^y)$

۴-متغیر yدر x یا توانی از آن ضرب شده باشد $(ax^m y^n)$

۵-متغی yجلوی توابع معکوس مثلثاتی باشد.

روش محاسبه مشتق ضمنی

۱-همه عبارت ها را یک طرف آورده و مساوی صفر قرار دهید.

۲-با استفاده از فرمول زیر مشتق ضمنی محاسبه می شود.

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\frac{\text{مشتق عبارت نسبت به متغیر x}}{\text{مشتق عبارت نسبت متغیر به } y}$$

مثال های گوناگون از مشتق گیری ضمنی:

۱-حالتی که متغیرهای x و yدر مساله از هم جدا باشند (یعنی به صورت ضرب کنار هم نباشند)

مثال: اگر $x^2+y^3=x^4-5x+y$ باشد $\frac{dy}{dx}$ را بدست آورید؟

$$x^2+y^3-x^4+5x-y=0$$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-4x^3+5}{3y^2-1}$$

نکته ۱: در این حالت که متغیرهای x و y از هم جدا هستند مانند مثال قبل وقتی مشتق نسبت به گرفته می شود متغیر y در نظر گرفته نمی شود. و بالعکس

نکته ۲: در محاسبه مشتق ضمنی در یک نقطه باید بعد از مشتق گرفتن طول و عرض نقطه داده شده را به جای x و y در مشتق جایگذاری کرده.

تست: اگر $x+\sin y=y+\cos x$ باشد مقدار $\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}$ ج) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$ د) $\frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{2}}$

$$x+\sin y-y-\cos x=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1+\sin x}{\cos y-1}\xrightarrow{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}$$

$$=-\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

گزینه د صحیح است.

۲-حالتی است که متغیرهای x و y در هم ضرب شده باشند.

مثال: اگر $x^2y^3 = 3xy^5 - y^2x + 1$ مطلوبست محاسبه $\frac{dy}{dx}$ ؟

$$x^2y^3 - 3xy^5 + y^2x - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3 - 3y^5 + y^2}{2y^2x^2 - 15y^4x + 2yx}$$

تذکر: در حالتی که x و y در هم ضرب شده باشند در صورت کسر،فقط از x^n مشتق گرفته و y^n بدون تغییر در کنار مشتق x^n ضرب می کنیم و به همین ترتیب در مخرج کسر فقط از y^n مشتق گرفته و x^n را بدون تغییر در مشتق y^n ضرب کنید.

تست: اگر $x\,y^2 - y^2x^2 = 2x - 5y$ مقدار $\frac{dx}{dy}$ در نقطه $A\left(1, \frac{2}{5}\right)$ کدام است؟

الف) $\frac{4}{5}$ ب) $-\frac{4}{5}$ ج) $-\frac{5}{4}$ د) $\frac{5}{4}$

حل:

$$xy^2 - y^2x^2 - 2x + 5y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - 2xy^2 - 2}{2xy - 2yx^2 + 5} \xrightarrow{A\left(1,\frac{2}{5}\right)} \frac{dy}{dx}\left(1, \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

ولی چون $\frac{dx}{dy}$ را می خواهیم آن را معکوس کرده و ساده کنید. گزینه د صحیح است. $\frac{dx}{dy} = \frac{5}{4}$

۳-حالتی که مشتق ضمنی را برای توابع نهایی و ln مثلثاتی می گیریم: چون در فرمول مشتق این توابع u' داریم برای محاسبه مشتق ضمنی را فقط از x و در مخرج مشتق فقط از y بگیرید.

تست:

اگر $\sin(x+y)=\cos(x+y)$ باشدمقدارمشتق ضمنی $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱- ج) ۱ د) ۲

حل: گزینه ب صحیح است

$$\sin(x+y)-\cos(x+y)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1\times\cos(x+y)+1\sin(x+y)}{1\times\cos(x+y)+1\sin(x+y)}=-1$$

تست: اگر $e^{y-x}-x=\ln x-\ln y$ باشد مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $A(1,1)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{-3}{2}$ د) ۱-

حل: گزینه ب صحیح است

$$e^{y-x}-x-\ln x+\ln y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{y-x}-1-\frac{1}{x}}{e^{y-x}+\frac{1}{y}} \xrightarrow{A(1,1)} \frac{dy}{dx}(1,1)=\frac{3}{2}$$

پارامتری کردن تابع

در تابع $y=f(x)$ اگر y,x را جدا کرده و بر حسب یک پارامتر جدید بنویسیم اصطلاحاً گفته می شود و تابع پارامتری شده است مثلاً در تابع $y=x^3$ اگر $x=t$ آنگاه $\Leftarrow$ $y=f(x)=\begin{cases}x=t\\ y=t^3\end{cases}$

مشتق گیری پارامتری: یکی دیگر از انواع مشتق گیری می باشد که با نماد $\frac{dy}{dx}=y'$ نشان می دهند و موارد استفاده از مشتق گیری پارامتری برابر است با:

۱-باید تعداد معادلات حتماً ۲ تا باشد.

۲-درست راست معادله ها حتماً باید متغیرها مثل هم باشند.

فـرمـول مـشـتق پـارامـتری

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

تـوجه: مـی تـوان در مـشـتق گـیـری پـارامـتری بـه جای t عدد قـرار داد و $\frac{dy}{dx}$ را بـه صـورت عدد ثـابـت بـدسـت آورد.

مـثـال: اگـر $\begin{cases} x=t^2+t \\ y=t^3-2t+1 \end{cases}$ مـقـدار $\frac{dy}{dx}$ را مـحـاسـبـه کـنـیـد.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-2}{2t+1}$$

تـسـت: اگـر $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t+\sin t \end{cases}$ مـقـدار در نـقـطـه $t=\frac{3\pi}{4}$ کـدام اسـت؟

الـف) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) ۱ ج) ۲- د) ۲

حل: گـزیـنـه دصـحـیـح اسـت

$$\frac{dy}{dx}=y=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t+\cos t}{\cos t}\xrightarrow{t=\frac{3\pi}{4}}\frac{-\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}}=\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}=2$$

مـحـاسـبـه مـشـتق ضـمـنـی مـرتـبـه دوم $\left(y=\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

بـرای مـحـاسـبـه مـشـتق ضـمـنـی مـعـادلـه داده شـده را بـه یـکطـرف آورده و سـپـس دوبـار مـشـتق گـیـری مـی کـنـیـم. بـه ایـن صـورت کـه هـر جـا y^n بـود بـه جـای مـشـتق آن $ny'y^{n-1}$ و هـر جـا y' بـود بـه جـای آن y'' و اگـر yy' بـود از قـانـون ضـرب مـشـتق بـگـیـریـد.

یعنی $(yy')' = y'\times y' + y''y = y'^2 + y''y$ بعد از دوبار مشتق گیری هر جا y' بود طبق فرمول $y' = -\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y}$, y' را حذف می کنیم.

مثال: اگر $x^2+y^2=1$ باشد حاصل $\frac{d^2y}{dx^2}$ کدام است؟

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2x + 2yy' = 0$$

$$\rightarrow 2 + (2y'y' + 2yy'') = 0 \xrightarrow{y'=-\frac{x}{y}} 2 + 2\left(\frac{-x}{y}\right)^2 + 2yy'' = 0$$

$$\rightarrow y'' = \frac{-2-2\left(\frac{-x}{y}\right)^2}{2y} = \frac{-2-2\frac{x^2}{y^2}}{2y} = \frac{\frac{-2y^2-2x^2}{y^2}}{2y} = \frac{-2\left(y^2+x^2\right)}{2y^3}$$

محاسبه مشتق پارامتری مرتبه دوم $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

برای محاسبه مشتق دوم پارامتری از رابطه زیر کمک بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{\left(x'_t\right)^3}$$

y''_t : مشتق دوم y است به t

y'_t : مشتق اول y نسبت به t

x''_t : مشتق دوم x نسبت به t

x'_t : مشتق اول x نسبت به t

مثال: اگر $\begin{cases} x = 4t - t^2 \\ y = t^3 + t \end{cases}$ باشد $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $t=0$ را بدست آورید؟

$$\begin{cases} y'_t = 3t^2 + 1 \rightarrow y''_t = 6t \\ x'_t = 4 = 2t \rightarrow x''_t = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{6t(4-2t)-(3t^2+1)(-2)}{\left(4-2t\right)^3} \xrightarrow{t=0} y'' = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$$

توجه: کاربرد مشتق ضمنی

برای محاسبه مشتق توابعی که به صورت رادیکال های تو در تو باشد و رادیکال تابی نهایت ادامه داشته باشد می توان از مشتق ضمنی استفاده کرد. روش حل را در مثال زیر توضیح می دهیم:

مثال: اگر $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\ldots}}}$ باشد y'_x محاسبه کنید؟

حل: ابتدا رادیکال اول را حذف می کنیم یعنی طرفین رابطه را به توان ۲ می رسانیم.

همه عبارت ها را به یک طرف آورده

$$y^2=\sin x+\underbrace{\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\ldots}}}}_{y}\Rightarrow y^2=\sin x+y\Rightarrow y^2-\sin x-y=0$$

سپس با مشتق ضمنی y' را محاسبه می کنیم $y'=-\dfrac{-\cos x}{2y-1}$ و

حالا عبارت $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\ldots}}}$ را دوباره به جای y در مخرج کسر قرار داده.

$$\Rightarrow y=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\ldots}}}-1}$$

تذکر: بعضی مواقع ممکن است بخواهیم مشتق اول یا دوم ضمنی را در یک نقطه دلخواه محاسبه کنیم.

مثال: اگر $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\ldots}}}$ مقدار $\dfrac{dy}{dx}\left(x=\dfrac{\pi}{6}\right)$ را محاسبه کنید؟

حل: ۱)حذف رادیکال $y^2=\sin x+y$

۲) جایگذاری $x=\dfrac{\pi}{6}$ در ۱ و محاسبه y

$$y^2=\sin\frac{\pi}{6}+y\Rightarrow y^2=\frac{1}{2}+y\Rightarrow y^2-y-\frac{1}{2}=0$$

در مشتق ضمنی برای جایگذاری باید هم طول و هم عرض نقطه را داشته باشیم.

y_2 قابل قبول نیست چون زیر رادیکال در مساله همواره مثبت است.

$$\Delta = 1+2 = 3 \Longrightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{3}}{2a} \begin{cases} y_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} & y_1 > 0 \\ y_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & y_2 < 0 \end{cases} \xrightarrow{\sqrt{3}=1/6}$$

$$= y^2 - \sin x - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1} \xrightarrow{y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

محاسبه مشتق وارون تابع

اگر $y = f(x)$ یک تابع دلخواه باشد وارون آن را با $f^{-1}(x)$ نشان می دهیم. یکی از تفاوت های تابع $f(x)$ و وارون آن یعنی $f^{-1}(x)$ در این است که طول تابع $f^{-1}=$ عرض تابع f و عرض تابع $f^{-1}=$ طول تابع f در واقع در تابع f^{-1} جای طول و عرض عوض شده است به عنوان مثال اگر $f(x) = x^2 + x + 1$ باشد اگر نقطه $x=1$ طول تابع f^{-1} باشد و بخواهیم طول x در تابع f در فاصله $[0,2)$ را بدست آوریم باید $x=1$ را به جای عرض تابع f قرار دهیم.

($x=1$ طول تابع f^{-1} = عرض تابع f $y=1$)

$$\Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

چون طول x در فاصله $[0,2)$ خواسته بدست آمده فقط $x=0$ جواب است و در این فاصله قرار می گیرد.

محاسبه مشتق تابع f^{-1}

با استفاده از رابطه زیر و بدون محاسبه f^{-1} می توان مشتق f^{-1} را بدست آورید.

$$(f^{-1})(x)=\frac{1}{f'(y)}$$

مثال: اگر $f(x)=x^2+x+1$ باشد و $D_f=(-1,1]$ مقدار مشتق تابع f^{-1} را در نقطه ای به طول $x=1$ واقع بر f^{-1} بدست آورید.

$$(f^{-1})(1)=\frac{1}{f'(y)}$$

$$y\to 1=x^2+x+1 \Rightarrow x^2+x=0$$

$$\Rightarrow x(x+1)=0\begin{cases} x=0 \\ x+1=0\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

X=-1غیرقابل قبول چون در فاصله $(-1,1]$قرار ندارد.

$$\Rightarrow f'(x)=2x+1\xrightarrow{x=0} f'(0)=1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{1}=1$$

تست: اگر $f(x)=1+x+e^x$ باشد $(f^{-1})'(2)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{3}$

حل :

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(y)}$$

$$\Rightarrow 2=1+x+e^x \Rightarrow 1=x+e^x \Rightarrow x=0$$

$$f'(x)=1+e^x \xrightarrow{x=0} f'(0)=1+e^0=2$$

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{2}$$

گزینه ج صحیح است.

بدست آوردن معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی

۱)بدست آوردن شیب خط مماس (ضریب زاویه خط مماس)

اگر تابع f و نقطه $x=a$ را داشته باشیم می توان گفت

شیب خط مماس= $f'(a)$: مشتق تابع f در نقطه $x=a$

شیب خط قائم = $\frac{-1}{f'(a)}$ عکس و قرینه شیب خط مماس

مثال: اگر $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ باشد ضریب زاویه خط قائم بر منحنی در نقطه $x=3$ را بدست آورید؟

ابتدا از تابع مشتق گرفته و سپس نقطه $x=3$ را به جای xهای مشتق قرار داده تا شیب یا ضریب زاویه خط مماس بدست آورید. عدد بدست آمده را عکس و قرینه کرده تا ضریب زاویه خط قائم بدست آید.

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \rightarrow f'(3)=\frac{6}{3\sqrt[3]{64}}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$ شیب خط مماس

شیب خط قائم = ۲-

مثال ۲) اگر $x^2y^2=xy-x+y$ باشد مقدار شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $A(1,-1)$ را بدست آورید؟

حل: برای مشتق گیری از این تابع باید از مشتق ضمنی استفاده شود.

$$x^2y^2-xy+x-y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^2-y+1}{2yx^2-x-1} \rightarrow \frac{dy}{dx}(1,-1)=-\frac{4}{-4}=1 \Longrightarrow$$

شیب خط مماس=۱

مثال ۳) اگر $y=t^3+t^2, x=t^2-t$ باشد مقدار ضریب زاویه (شیب) خط قائم بر منحنی را در نقطه $t=-1$ بدست آورید؟

حل: برای مشتق گیری باید از مشتق پارامتری استفاده کرد.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+2t}{2t-1}\xrightarrow{t=-1}\frac{dy}{dx}(t=-1)=\frac{-1}{3}$$

شیب خط مماس $=\frac{-1}{3}\Rightarrow$ شیب خط قائم = +۳

نکته ۱) شیب خط های که موازی محور xها هستند (یعنی به فرم $y=k$) برابر صفر خواهد بود.

شیب خطهای که موازی محور yها هستند (یعنی به فرم $x=k$)برابر ∞ (تعریف نشده) خواهد بود.

نکته ۲)محاسبه شیب خطهایی به فرم $ax+by=c$: ابتدا y,x را به یک طرف معادله برده و از فرمول زیر استفاده می کنیم. شیب خط=m=-$\frac{x_{\text{ضریب}}}{y_{\text{ضریب}}}$

مثال: شیب یا ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $2x=5y-6$ را بدست آورید؟

$$2x-5y=-6\Rightarrow m=-\frac{2}{-5}=\frac{2}{5}$$

نکته ۳)شیب خطهایی که به فرم $y=ax+b$ می باشند برابر با ضریب x یعنی aمی باشد.

مثال: شیب خط $y=\frac{1}{2}x+5$ را بدست آورید؟ شیب خط=$\frac{1}{2}$

شرط موازی بودن دوخط:دوخط را موازی میگویند اگرشیب آنها مساوی باشد

شرط عمودبودن دو خط: دو خط را بر هم عمود گویند اگر حاصل ضرب شیب های آن ها برابر شود ۱- شود یا به عبارت دیگر شیب یکی از خطوط عکس وقرینه شیب خط دیگر باشد

مثال۱: مقدار عدد a چند باشد که دو خط $ax-2y=3, 2x-3y=4$ بر هم عمود و یا با هم موازی باشند؟

حل: ابتدا شیب دو خط را بدست می آوریم سپس شرط موازی بودن و عمود بودن را می نویسم.

$2x-3y=4 \to$ خط شیب $=-\frac{a}{-2}=\frac{a}{2}$

$ax-2y=3 \to$ خط شیب $=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$

موازی بودن $\frac{a}{2}=\frac{2}{3}$ وسطین طرفین $\to 3a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$

عمود بودن $\frac{a}{2}\times\frac{2}{3}=-1 \Rightarrow \frac{2a}{6}=-1 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=\frac{-6}{3}=-3$

مثال۲- اگر $f(x)=x^2-3x+3$ باشد مقدار عدد a را در خط $2ax-y=5$ طوری بدست آورید که خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x=1$ با خط $2ax-y=5$ موازی باشد؟

حل: برای موازی بودن باید شیب ها مساوی باشند.

$2ax-y=5 \to$ شیب $=-\frac{2a}{-1}=2a$

در $f(x)=x^2-3x+3$ تابع مشتق=خط شیب $\Rightarrow f'(x)=2x-3 \xrightarrow{x=1} f'(1)=-1$
نقطه $x=1$

شرط موازی بودن $\Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$

تست۱: در چه نقاطی از منحنی $y=x^3+x-2$ خط مماس بر منحنی موازی خط $y=4x-1$ است؟

الف) $x=0$ ب) $x=\pm1$ ج) $x=\pm2$ د) $x=\pm3$

حل: برای موازی بودن باید شیب ها مساوی باشند.

$y-4x=-1 \Rightarrow$ خط شیب $=-\frac{-4}{1}=4$

$f(x)=x^3+x-2$ تابع مشتق=خط شیب $=f'(x)=3x^2+1$

شرط موازی بودن $3x^2+1=4 \Rightarrow 3x^2=4-1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$

گزینه ب صحیح است.

تست ۲ : اگر $y=x^2+ax+b$ باشد و نقطه $A(1,1)$ روی نمودار تابع باشد مقدار b,a چند باشد که خط $y=x$ بر نمودار تابع مماس باشد؟

الف) $b=-2, a=2$ ب) $b=-3, a=3$ ج) $b=+1, a=-1$ د) $b=-1, a=1$

حل: در مثال بالا برای محاسبه b,a از دو نکته زیر استفاده می شود.

نکته ۱) نقطه $A(1,1)$ روی نمودار است پس در معادله تابع صدق می کند یعنی به جای y,x های تابع نقطه $(1,1)$ را می گذاریم.

$1=1^2+a(1)+b \Rightarrow 1=1+a+b \Rightarrow a+b=0$

نکته ۲ : چون در تست گفته شد خط $y=x$ بر نمودار تابع مماس است پس بایدشیب خط مماس برنمودارتابع درنقطه $A(1,1)$ باشیب خط $y=x$ برابر باشد

شیب خط=مشتق تابع x^2+ax+b درنقطه $(1,1)$ $\Rightarrow f'(x)=2x+a$ $\Rightarrow f'(1)=2+a$

شیب خط y=x=1 $\Rightarrow 2+a=1 \Rightarrow a=-1$

سپس $a=-1$ را در رابطه ای که از نکته ۱ بدست آوردیم جایگذاری کرده و می آید.

گزینه ج صحیح است.

$a+b=0 \xrightarrow{a=-1} -1+b=0 \Rightarrow b=1$

پیداکردن معادله خط مماس و خط قائم

معادله خط: هر رابطه بین y,x (y,xبا توان ۱) به صورت ax+by=c را معادله خط می نامند. با استفاده از

رابطه های زیر می توان معادله خط مماس و خط قائم تابع f در نقطه $A(x_A,y_A)$ را بدست آورد.

شیب خط مماس $f'(x_A)=m$ خط مماس $y-y_A=f'(x_A)(x-x_A)$

شیب خط قائم $\left(\frac{-1}{f'(x_A)}\right)=m$ خط قائم $y-y_A=\frac{-1}{f'(x_A)}(x-x_A)$

توجه: برای بدست آوردن معادله خط مماس و خط قائم باید طول نقطه x_A عرض نقطه y_A و مقدار شیب یعنی مشتق تابع در نقطه داده شده را بدست آورده و در رابطه ها قرار داد.

مثال: ۱- اگر $y=x^3+x^2+x$ باشد معادله خط مماس و خط قائم منحنی را در نقطه به طول $x=1$ بدست اورید؟

حل: در این مثال ما فقط طول نقطه را داریم برای بدست آوردن عرض باید طول نقطه را به جای x تابع گذاشته تا عرض آن بدست آید.

طول نقطه $x=1 \Rightarrow$ عرض نقطه: $y=1^3+1^2+1=3$

$x=1$ مشتق تابع در نقطه $= f'(x)=3x^2+2x+1 \xrightarrow{x=1}$ شیب خط مماس $=6$

شیب خط قائم $=-\frac{1}{6}$

معادله خط مماس: $y-3=6(x-1)\Rightarrow y=6x-6+3\Rightarrow y=6x-3$

معادله خط قائم: $y-3=\frac{-1}{6}(x-1)\Rightarrow y=\frac{-1}{6}x+\frac{1}{6}+3\Rightarrow y=\frac{-1}{6}x+\frac{19}{6}$

برای از بین بردن مخرج کسر می توان طرفین رابطه را در ۶ ضرب کرد

$\Rightarrow 6y=-x+19$

مثال۲- اگر $\begin{cases} x=e^t-1 \\ y=e^{2t}+t \end{cases}$ معادله خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $t=0$ را بدست آورید؟

حل:

$T=0$ در شیب خط= مشتق تابع پارامتری $=\frac{dy}{dx}=\frac{2e^{2t}+1}{e^{t}}\xrightarrow{t=0}\frac{3}{1}=3$

طول نقطه $x=e^{0}-1=0$

عرض نقطه $y=e^{2(0)}+0=1$

معادله خط مماس $y-1=3(x-0)\Rightarrow y=3x+1$

نکته۱- در تست ها معمولا برای پیدا کردن معادله خط مماس می توان با بدست آوردن فقط شیب خط (بدون نوشتن معادله) گزینه صحیح را پیدا کرد. (مانند تست ۲)

نکته ۲- بعضی مواقع در تست ها ممکن است در گزینه ها تمامی شیب ها مساوی باشند در این صورت برای پیدا کردن گزینه صحیح می توان از طول و عرض نقطه داده شده کمک گرفت. (مانند تست ۱)

تست۱- اگر $y=(2t+1)^{2}, x=\sqrt{2t^{2}+1}$ معادله خط مماس در $t=2$ کدام است؟

الف) $y=15x-20$ ب) $y=15x+20$ ج) $y=15x+10$ د) $y=15x-10$

حل: چون در همه گزینه ها شیب ۱۵دارند پس نیازی به محاسبه شیب نیست. بهتر است طبق نکته ۲ از طول و عرض بگیریم و فقط در گزینه الف اگر به جای $x=3$ قرار دهید $y=25$ را می دهد.

$$t=1\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=25\end{cases}$$

تست۲- معادله خط قائم بر بیضی $\frac{x^{2}}{2}+2y^{2}=1$ در نقطه $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

الف) $y=2x-\frac{3}{2}$ ب) $y=-2x-\frac{3}{2}$ ج) $y=\frac{-1}{2}x+1$ د) $y=\frac{-1}{2}x-1$

حل: چون شیب ها متفاوت هستند پس بهتر است ابتدا شیب را از راه مشتق ضمنی بدست آوریم.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}\xrightarrow{A\left(1,\frac{1}{2}\right)}\text{شیب خط مماس}=\frac{-1}{2}\Rightarrow \text{شیب خط قائم}=\pm 2$$

فقط گزینه الف شیب قائم ۲ دارد.

معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی f^{-1}

با استفاده از رابطه روبرو معادله خط مماس بر f^{-1} بدست می آید.

$$y-y_A=(f^{-1})'_{(x_A)}(x-x_A)$$

که x_A طول f^{-1} و y_A عرض f^{-1} خواهد بود برای معادله خط قائم بر f^{-1} کافی است شیب خط مماس را عکس و قرینه کنیم.

تست ۱- اگر $f(x)=e^x-e^{-x}+x$ باشد معادله خط مماس بر نمودار f^{-1} در نقطه ای به طول $x=0$ کدام است؟

الف) $2y=x$ ب) $3y=x$ ج) $y=2x$ د) $y=3x$

حل:

طول f = عرض f^{-1} $\Leftarrow$ $x=0$ طول f^{-1}

عرض f^{-1} f^{-1} $0=e^x-e^x+x\Rightarrow x=0$ $\Leftarrow$ عرض f = طول f^{-1} = نقطه

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{e^0+e^0+1}=\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=e^x+e^{-x}+1$$

$$\Rightarrow y-0=\frac{1}{3}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{3}x\rightarrow 3y=x$$

گزینه ب صحیح است.

تست۲- اگر $f(x)=x^3+x$ باشد خط قائم بر نمودار $f^{-1}(x)$ در نقطه $x=2$ واقع بر آن محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹

حل:

عرض f^{-1} $x=1=$ $\Rightarrow 2=x^3+x \Rightarrow$ عرض f = طول f^{-1} $\rightarrow 2=$ طول f^{-1}

طول f = عرض f^{-1}

$\Rightarrow (f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$ شیب خط مماس $\Rightarrow$ شیب خط قائم $=-4$

معادله خط قائم $y-1=-4(x-2)\Rightarrow y-1=-4x+8\Rightarrow y=-4x+9$

گزینه د صحیح است. $y=-4x+9\xrightarrow{x=0} y=9$

نکته: اگر خط قائم یا مماس بر منحنی بخواهد محور y ها را قطع کند یعنی طول آن صفر است ولی اگر منحنی بخواهد محور x ها را قطع کند یعنی عروض آن صفر است.

تست۳- شیب خط قائم بر منحنی $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ در نقطه کدام $x=\ln(2+\sqrt{3})$ است؟

الف) $\frac{-1}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) -2 د) $+2$

حل:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\Rightarrow f'(\ln 2+\sqrt{3})=\frac{1}{2}\left(e^{\ln(2+\sqrt{3})}+e^{-\ln(2+\sqrt{3})}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\ln(2+\sqrt{3})}+e^{\ln(2+\sqrt{3})}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}(4)=\frac{4}{2}=2$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\rightarrow\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2-\sqrt{3}}{1}=2-\sqrt{3}$$

شیب خط مماس $=2\Rightarrow$ شیب خط قائم $=\dfrac{-1}{2}$

گزینه الف صحیح است.

تست۴- اگر $f(x)=x^3+3x+2$ باشد خط قائم بر نمودار در نقطه های به طول 6 واقع بر آن از کدام نقطه می گذرد؟

الف) $(7,3)$ ب) $(7,-5)$ ج) $(5,3)$ د) $(5,-4)$

حل:

طول f = عرض f^{-1} ، عرض $f = 6 \Rightarrow 6=x^3+3x+2 \Rightarrow 4=x^3+3x \Rightarrow x=1$ ، طول $f^{-1}=6$

$$f'(x)=3x^2+3 \xrightarrow{x=1} f'(1)=3+3=6$$

شیب خط مماس $(f^{-1})'(6)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ شیب خط قائم $=-6$

معادله خط قائم $y-1=-6(x-6) \Rightarrow y-1=-6x+36 \Rightarrow y=-6x+37$

دربین گزینه ها فقط گزینه (ب) هست که اگر در معادله خط $x=7$ مقدار $y=-5$ را می دهد.

تست ۵- اگر $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}$ باشد y''_x برابر است با ...

الف) $\frac{-2}{(2y-1)^3}$ ب) $\frac{-1}{(2y-1)^2}$ ج) $\frac{-2y'}{2y-1}$ د) $\frac{y'^2}{(2y-1)^3}$

حل: گزینه الف $\quad y^2=x+y \to y^2-x-y=C$

مشتق ضمنی $\boxed{y'=-\frac{-1}{2y-1}=\frac{1}{2y-1}}$

مشتق اول $2yy'-1-y'=0 \Rightarrow$ مشتق دوم $\to 2\left(y'^2+yy''\right)-y''=0 \Rightarrow 2y'^2+2yy''-y''=0$

$$\Rightarrow 2yy''-y''=-2y'^2 \Rightarrow y''(2y-1)=-2y'^2 \Rightarrow y''=\frac{-2y'^2}{2y-1} \xrightarrow{y'=\frac{1}{2y-1}}$$

$$y''=\frac{-2\left(\frac{1}{2y-1}\right)^2}{2y-1}=\frac{-2\frac{1}{(2y-1)^2}}{2y-1}=\frac{-2}{(2y-1)^3}$$

فصل چهارم

مشتقات زنجیره ای- مشتق f^g کاربرد مشتق در بهینه سازی معرفی توابع معکوس مثلثاتی و مشتقات آنها

مشتق گیری از توابع چند ضابطه ای در یک نقطه:

تابع دو ضابطه ای زیر به ما داده شده است می خواهیم مشتق تابع را در نقطه $x=2$ بدست آوریم به صورت زیر عمل کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & x>2 \\ x^2-2x+1 & x\le 2 \end{cases}$$

۱-اگر از تابع در حالت $x>2$ مشتق بگیریم در واقع مشتق راست تابع را در نقطه $x=2$ حساب کرده ایم که با نماد $f'_+(2)$ نشان می دهند.

$x>2 \to f'(x)=2x+2 \to f'_+(2)=2(2)+2=6 \to$ مقدار مشتق راست

۲-اگر از تابع در حالت $x<2$ مشتق بگیریم در واقع مشتق چپ تابع را در نقطه $x=2$ حساب کرده ایم که با نماد $f'_-(2)$ نشان می دهند.

$x<2 \to f'(x)=2x+2 \to f'_-(2)=2(2)-2=2 \to$ مقدار مشتق چپ

توجه: در توابع چند ضابطه ای تابع در یک نقطه وقتی مشتق پذیر هست که مشتق چپ و راست آن با هم برابر شود در این مثال چون مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع در نقطه $x=2$ مشتق پذیر نیست.

مثال: آیا تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x>1 \\ 2x-1 & x\le 1 \end{cases}$ در نقطه x=1 مشتق پذیر است؟

$$\to f'(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \to f'_+(1)=2 \\ 2 & x<1 \to f'_-(1)=2 \end{cases}$$

مشتق چپ=مشتق راست تابع در $x=1$ مشتق پذیر است.

کاربرد مشتق پذیر بودن تابع در یک نقطه

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+x & x>1 \\ 5x-1 & x\le 1 \end{cases}$ باشد مقدار عدد چقدر باشد که تابع در نقطه $x=1$ مشتق پذیر باشد؟

حل: همیشه برای محاسبه مقدار باید مشتق چپ و راست را در نقطه داده شده بدست آورده و مساوی هم قرار دهیم.

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+1 & x>1 \to f'_+(1)=2a(1)+1=2a+1 \\ 5 & x<1 \to f'_-(1)=5 \end{cases} \Rightarrow 2a+1=5 \Rightarrow a=2$$

مثال۲= اگر $f(x)\begin{cases} ax^2+bx & x<1 \\ x^2-2x & 1\le x<2 \\ 3ax^2+b & x\ge 2 \end{cases}$ باشد مقدار b,a را طوری بدست آورید که تابع در نقاط $x=1$, $x=2$ مشتق پذیر باشد.

حل: در این مثال چون دو نقطه داریم باید مشتق چپ و راست را برای هر نقطه جداگانه بدست آورده مساوی هم قرار دهیم.

$$f'(x)\begin{cases} 2ax+b & x<1 \to f'_-(1)=2a+b \\ 2x-2 & 1\le x<2 \to f'_+(1)=2-2=0 \qquad \Rightarrow 2a+b=0 \\ & \to f'_-(2)=2(2)-2=2 \\ 6ax & x\ge 2 \to \quad \to f'_+(2)=6a(2)-2=12a \qquad \Rightarrow 12a=2 \Rightarrow a=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

در رابطه گذاشته $\xrightarrow{a=\frac{1}{6}} 2\left(\frac{1}{6}\right)+b=0 \to b=\frac{-1}{3}$

مثال۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2-bx-1 & |x|\le 2 \\ x^2-3x+1 & |x|\rangle 2 \end{cases}$ باشد حاصل $15a+b$ را طوری بدست آورید که تابع در نقاط مشخص شده مشتق پذیر باشد؟

حل: با توجه به دامنه تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2-bx-1 & -2\le x\le 2 \\ x^2-3x+1 & x>2 \quad x<-2 \end{cases}$

پس باید مشتق پذیری تابع را در دو نقطه $2,2-$ بررسی کرد یعنی مشتق چپ و راست هر کدام را جداگانه بدست آورده و با هم مساوی قرار دهیم.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax-b & -2\le x\le 2 \\ 2x-3 & x>2 \quad x<-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2)=2(2)-3=1 \\ f'_-(2)=3(2)^2+2a(2)-b=12+4a-b \end{cases} \Rightarrow 12+4a-b=1 \Rightarrow 4a-b=-11$$

$$\begin{cases} f'_+(-2)=3(-2)^2+2a(-2)-b=12-4a-b \Rightarrow 12-4a-b=-7 \Rightarrow -4a-b=-19 \\ f'_-(2)=3(-2)-3=-7 \end{cases}$$

برای محاسبه b,a در معادله بدست آمده را در دستگاه قرار داده و

$$\begin{cases} 4a-b=-11 \\ \underline{-4a-b=-19} \end{cases}$$

$$-2b=-30 \Rightarrow b=15 \to 4a-15=-11 \Rightarrow 4a=-11+15 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow 15a+b=15(1)+15=30$$

محاسبه حد تابع (روش جایگزین کردن)

حد تابع در نقطه مانند a را با نماد $\lim_{x\to a} f(x)$ نشان می دهند برای محاسبه حد تابع می توان عدد را به جای

قرار داد و تحت شرایط خاص با جایگذاری جواب حد را بدست آورد مانند مثال های زیر:

$$1)\lim_{x\to 1} x^2-2x+3=1^2-2(1)+3=2$$

$$2)\lim_{x\to -2} \frac{2x-1}{3x+1}=\frac{2(-2)-1}{3(-2)+1}=\frac{-5}{-5}=+1$$

محاسبه حد در توابع چند ضابطه ای:

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & x>1 \\ 2x^2-6 & x<1 \end{cases}$ مقدار حد تابع را در نقطه $x=1$ بدست آورید؟

حل: مانند مشتق توابع چند ضابطه ای حد تابع را به دو قسمت حد چپ و حد راست تبدیل می کنیم. اگر مقدار حد چپ و حد راست با هم برابر شود ($\pm\infty$نشود) اصطلاحاً گفته می شود تابع در نقطه داده شده حد دارد

چون حد راست و حد چپ تابع در نقطه $x=1$

حد راست $\lim_{x\to 1^+} x^2-5=1-5=-4$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-} 2x^2-6=2-6=-4$

با هم برابر شده سپس تابع در نقطه $x=1$ حد دارد

کاربرد حد چپ و حد راست در محاسبه مقادیر مجهول در حالتی که تابع مشتق پذیر باشد:

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1 & x<1 \\ 2ax^2-b & x\geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق پذیر باشد مقدار b,a را پیدا کنید؟

مثال: همیشه اول مشتق چپ و راست را محاسبه و مساوی هم قرار می دهیم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x<1 \to f'_-(1)=2a(1)+b=2a+b \\ 4ax & x\geq 1 \to f'_+(1)=4a(1)=4a \end{cases} \Rightarrow 2a+b=4a \Rightarrow 2a-b=0$$

حال حد چپ و راست تابع را محاسبه کرده و مساوی هم قرار می دهیم.

راست حد $\lim_{x\to 1^-} ax^2+bx-1=a+b-1$

چپ حد $\lim_{x\to 1^+} 2ax^2-b=2a-b$

حال دو رابطه بدست آمده را در دستگاه دو معادله و دو مجهول قرار می دهیم.

$$\begin{cases}2a-b=0\\ -a+2b=+1\end{cases}\to\begin{cases}2a-b=0\\ \underline{-2a+4b=2}\end{cases}$$

$$3b=2\Rightarrow b=\frac{2}{3}\to 2a-\frac{2}{3}=0\Rightarrow 2a=\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

محاسبه مشتق تابع قدر مطلق

برای محاسبه مشتق تابع قدر مطلق در نقطه ابتدا عدد داده شده را به جای x داخل قدر مطلق قرار دهید

۱-اگر عدد داده شده داخل قدر مطلق را (+) کند از خود تابع بدون در نظر گرفتن علامت قدر مطلق مشتق بگیرید و عدد را در مشتق جایگذاری کنید.

چون عدد مثبت شده بدون علامت قدر مطلق مشتق می گیریم.

مثال $f(x)=\left|x^3-x^2+1\right|$
$f'(2)=?\to 2^3-2^2+1=5>0$

حذف قدر مطلق $\to f(x)=x^3-x^2+1\to f'(x)=3x^2-2x\to f'(2)=12-4=8$

۲-اگر عدد داده شده داخل قدر مطلق را (-) کرد، قدر مطلق را حذف کرده و از قرینه تابع مشتق گرفته و عدد را به جای x در مشتق قرار دهید.

چون عدد منفی شده از قرینه تابع مشتق می گیریم.

مثال $f(x)=\left|3x^2-5x^2+1\right|\ f'(1)=?\to 3(1)^2-5(1)+1=-1<0$

حذف قدر مطلق $\to f(x)=-3x^2+5x-1\to f'(x)=-6x+5\Rightarrow f'(1)=-6+5=-1$

۳-اگر عدد داده شده عبارت داخل قدر مطلق را صفر کرد باید مشتق تابع را بدست آورده و حالت (مثبت و منفی) آن را در نظر بگیریم. اگر جواب مشتق بعد از جایگذاری عدد صفر شد اصطلاحاً گفته می شود تابع در نقطه داده شده مشتق پذیر است ولی در غیر این صورت تابع در نقطه داده شده مشتق ندارد.

مثال: اگر $f(x)=\left|\frac{x^2}{3}-3\right|$ باشد حاصل $f'(3)$ را بدست آورید؟

حل: چون عدد ۳ داخل قدر مطلق را صفر می کند باید ± مشتق را در نظر بگیریم.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2x}{3}\to f'(3)=2\\ \frac{-2x}{3}\to f'(3)=-2\end{cases}$$

تابع در $x=3$ مشتق ندارد.

مثال : اگر $f(x)=\left|x^2\right|$ حاصل $f'(0)=?$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\to f'(0)=0\\ -2x\to f'(0)=0\end{cases}$$

تابع در $x=0$ مشتق دارد.

تست :کدام گزینه در مورد مشتق تابع $f(x)=\left|\sin 2x-\cos 2x\right|$ درنقطه $x=\frac{\pi}{2}$ صحیح است؟

الف) $f'(\frac{\pi}{2})=-1$ ب) $f'(\frac{\pi}{2})=-2$ ج) $f'(\frac{\pi}{2})=2$ د) $f'(\frac{\pi}{2})=+1$

حل:

$$f(\frac{\pi}{2})=\sin 2\frac{\pi}{2}-\cos 2\frac{\pi}{2}=\sin\pi-\cos\pi=1>0$$

سپس قدر مطلق حذف از خود تابع مشتق می گیریم.

$f'(x)=2\cos 2x+2\sin 2x \rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=2\cos 2\frac{\pi}{2}+2\sin 2\frac{\pi}{2}=-2$

گزینه ب صحیح است.

نکته: بعضی مواقع ممکن است نقطه را در تابع قدر مطلق ندهند در این حالت باید ریشه های عبارت داخل قدر مطلق را بدست آوریم. اگر ریشه، ساده باشد نتیجه می شود که تابع در آن نقطه مشتق پذیر نمی باشد ولی اگر ریشه ساده نباشد نتیجه می دهد که تابع در آن نقطه مشتق پذیر می باشد (مانند تست ۳)

مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ مشتق پذیر نمی باشد چون $x=0$ ریشه ساده می باشد ولی تابع $f(x)=|x^2|$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر می باشد چون $x=0$ ریشه ساده تابع نیست بلکه ریشه مضاعف تابع است.

((نکته: برابر بودن تعداد ریشه ها با درجه x در تابع= ریشه ساده و تعداد ریشه ها با درجه x (توان x) در تابع برابر نباشد= ریشه غیرساده**))**

تست۱: اگر $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 1 \\ ax^2+bx+c & x>1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق مرتبه دوم داشته باشد حاصل $a-c$ کدام است؟

حل: هرگاه گفته شود تابع در یک نقطه مشتق دوم دارد برای محاسبه مقادیر مجعول باید مشتق اول (چپ و راست) همچنین مشتق دوم (چپ و راست) را جداگانه بدست آورده و مساوی هم قرار دهیم. اگر مقادیر مجعول بدست نیاید باید حد تابع (چپ و راست) را نیز بدست آورده و مساوی قرار دهیم.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x\le 1\to f'_-(1)=3(1)^2=3\\ 2ax+b & x>1\to f'_+(1)=2a(1)+b=2a+b\end{cases}\Rightarrow 2a+b=3$$

$$f''(x)=\begin{cases}6x & x\le 1\to f''(1)=6(1)=6\\ 2a & x>1\to f''_+(1)=2a\end{cases}\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3\xrightarrow{2a+b=3}$$

$$2(3)+b=3$$
$$6+b=3\Rightarrow b=-3$$

حد راست $\lim_{x\to 1^+} ax^2+bx+c=a+b+c$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-} x^3=1^3=1$

$$\Rightarrow a+b+c=1\xrightarrow[b=-3]{a=3}3+(-3)+c=1\Rightarrow c=1$$
$$\Rightarrow a-c=3-1=2$$

گزینه (ج) صحیح است.

تست ۲: مقدار عدد b چند باشد که تابع در $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & |x|\ge 1\\ ax^2+b & |x|<1\end{cases}$ در Rمشتق پذیر باشد؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) ۱ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{3}{2}$

حل: ابتدا تابع را به صورت زیر می نویسیم (از خاصیت قدر مطلق استفاده می کنیم)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\ge 1\\ \frac{-1}{x} & x\le -1\\ ax^2+b & -1<x<1\end{cases}$$

سپس مشتق پذیری را برای هر دو نقطه $x=-1,1$ بررسی می کنیم یعنی برای هرکدام جداگانه مشتق چپ و راست را بدست آورده و مساوی هم قرار می دهیم.

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} \quad x\geq 1 & \rightarrow \quad f'_+(1)=-1 \\ \dfrac{1}{x^2} \quad x\leq -1 & \rightarrow f'_-(1)=2a(1)=2a \qquad \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=\dfrac{-1}{2} \\ & \rightarrow f'_+(-1)=2a(-1)=-2a \\ 2ax \quad -1<x<1 & \rightarrow f'_-(-1)=\dfrac{1}{(-1)^2}=1 \qquad \Rightarrow -2a=1 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

چون مقدار bبدست نیامد حال حد چپ و راست تابع را برای بدست آورده و مساوی هم قرار می دهیم.

$x=1$ حد راست در $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1}=1$

$x=1$ حد چپ در $\lim_{x\to 1^-} ax+b=a(1)^2+b \Rightarrow a+b$

$$\Rightarrow a+b=1 \xrightarrow{a=\frac{-1}{2}} \frac{-1}{2}+b=1 \Rightarrow b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$b=\frac{3}{2}$$

$x=-1$ حد راست در $\lim_{x\to -1^+} ax^2+b=a(-1)^2+b \Rightarrow a+b$

$x=-1$ حد چپ در $\lim_{x\to -1^-}\dfrac{-1}{x}=\dfrac{-1}{-1}=1$

$$\Rightarrow a+b=1$$

گزینه د صحیح است.

تست۳- کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\left|(x^2-1)^2(x+1)^3\right|$ درست است؟

الف) در $x=-1$ مشتق پذیر نیست.

ب) در $x=1,-1$ مشتق پذیر است.

ج) در $x=1$ مشتق ندارد ولی در $x=-1$ مشتق دارد.

د) در $x=1$ مشتق دارد ولی در $x=-1$ مشتق ندارد.

حل: ریشه های عبارت های داخل قدر مطلق $x=+1, -1$ است که چون ریشه های ساده برای تابع نیستند پس تابع در هر دو نقطه مشتق پذیر هست و گزینه ب صحیح است.

$$\left(x^2-1\right)^2\left(x+1\right)^3=\left(\left(x-1\right)\left(x+1\right)\right)^2\left(x+1\right)^3=\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2\left(x+1\right)^3$$

$$=\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^5=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\to x=1\\x+1=0\to x=-1\end{cases}$$

مشتقات زنجیره ای

اگر $y=f(u)$ (y تابعی از u باشد) و $u=g(x)$ (u تابعی از x باشد) (در سمت راست عبارت ها، متغیرها مثل هم نباشند) برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

تست ۱: اگر $y=\frac{x}{1+x^2}$ و $x=\tan t2$ باشد مقدار $\frac{dy}{dt}$ در $t=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

الف) ۲-　　ب) ۱-　　ج) ۱　　د) ۲

حل: رسم نمودار می تواند در نوشتن رابطه قانون زنجیره ای کمک کند به این صورت که همیشه راس نمودار متغیر صورت و پایان نمودار متغیر مخرج یعنی در این تست t قرار می گیرد.

$y \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}$

$\downarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1(1+x^2)-2x(x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \qquad \frac{dx}{dt}=2(1+\tan^2 2x)$

$x \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\times 2(1+\tan^2 2x)$

$\downarrow$

$t \quad x=\tan 2\frac{\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{1-3}{(1+3)^2}\times 2\left(1+\tan^2 2\times\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-2}{16}\times 2\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=-1$$

برای محاسبه مشتق در نقطه $t=\frac{\pi}{6}$ باید از رابطه مقدار را نیز بدست آورد.

گزینه ب صحیح است.

تست۲: اگر $y=\ln\left(\sqrt{x^2+4x}\right)$ و $x=\frac{5t^2-8}{t^2+2}$ مقدار $\frac{dt}{dy}$ در $t=-1$ کدام است؟

الف) $\frac{4}{3}$ ب) $-\frac{3}{4}$ ج) $\frac{3}{4}$ د) $\frac{-2}{5}$

حل: نمودار مشتق در صورتی رسم می شود که متغیرها داده شده در سمت چپ باشند در غیر این صورت جای متغیرها را در صورت و مخرج عوض می کنیم در مثال بالا ابتدا $\frac{dy}{dt}$ را حساب می کنیم.

$$y \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$x \qquad y=\ln\sqrt{x^2+4x}=\ln\left(x^2+4x\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x\right)\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+4}{x^2+4x}\right)$$

$$\downarrow \qquad x=\frac{5t^2-8}{t^2+2}\rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{10t(t^2+2)-2t(5t^2-8)}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{36t}{\left(t^2+2\right)^2}$$

$$t \qquad x=\frac{5t^2-8}{t^2+2}\xrightarrow{t=-1}x=-1$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+4}{x^2+4x}\right)\times\frac{36t}{\left(t^2+2\right)^2}$$

$$\rightarrow\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2(-1)+4}{(-1)^2+4(-1)}\right)\times\frac{36(-1)}{\left((-1)^2+2\right)^2}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{dt}{dy}=\frac{3}{4}$$

گزینه ج صحیح است

محاسبه مشتق تابع به فرم $(f(x))^{g(x)}$

برای محاسبه توابعی که توان آنها خود نیز تابع است از رابطه زیر می توان مشتق را بدست آورد:

$$y=(f)^g\rightarrow y'=(f)^g\left[g'\ln f+(\ln f)'g\right]$$

تست ۱: مشتق تابع $y=x^{\sin x}$ کدام است؟

الف) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln(x)+\frac{\sin x}{x}\right)$

ب) $x^{\sin x}\left(\sin x\ln(x)+\frac{\cos x}{x}\right)$

ج) $x^{\sin x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)$

د) $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\ln x\right)$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$y=x^{\sin x}\begin{cases}g(x)=\sin x\\ f(x)=x\end{cases}\rightarrow y'=x^{\sin x}\left[\cos x\ \ln(x)+\frac{1}{x}\times\sin x\right]$$

$$g'(x)=\cos x$$

$$\ln f(x)=\ln x\rightarrow(\ln f)'=\frac{1}{x}$$

تست ۲: مشتق تابع $f(x)=(\tan)^{\cos x}$ در $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ب) ۰ ج) ۲ د) $\sqrt{2}$

حل:

$$y=(\tan x)^{\cos x}\begin{cases}g=\cos x\\ f=\tan x\end{cases}\rightarrow y'=(tan)^{\cos x}\left[-\sin x\ln\tan x+\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\cos x\right]$$

$$g'(x)=-\sin x$$

$$\ln f=\ln\tan x\rightarrow(\ln f)'=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$$

گزینه د صحیح است.

تست۳- اگر $f\left(x^3+6x\right)=g\left(\sin 4x+\sin 2x\right)$, $f'(0)=5$ باشد آنگاه $g'(0)$ کدام است؟

الف) ۵ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶

حل: گزینه الف صحیح است. از هر دو طرف تساوی طبق قانون ترکیب توابع مشتق می گیریم.

$$\left(3x^2+6\right)f'\left(x^3+6x\right)=\left(4\cos 4x+2\cos 2x\right)g'\left(\sin 4x+\sin 2x\right)$$

$$\xrightarrow{x=0}\left(3(0)^2+6\right)f'\left(0^3+6(0)\right)=\left(4\cos 0+2\cos 0\right)g'\left(\sin 0+\sin 0\right)$$

$$\Rightarrow 6f'(0)=6g'(0)\xrightarrow{f'(0)=5}6\times 5=6g'(0)\Rightarrow g'(0)=5$$

کاربرد مشتق در بهینه سازی

فرمول های محاسبه حجم و مساحت و محیط

۱.مساحت مستطیل: عرض ×طول $s = xy$

۲-محیط مستطیل: $p = 2(x+y)$

۳-حجم کره (r=شعاع دایره) $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

۴-حجم مخروط : $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

۵-حجم استوانه $v = \pi r^2 h$

نکته۱:رابطه فیثاغورث قائم الزاویه

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

نکته۲:فرمول فاصله نقطه تا مبدا:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تست۱: در بین مخروط های به مولد $3\sqrt{3}$ ، ماکزیمم حجم چند برابر π است؟

الف) ۱۵   ب) ۱۶   ج) ۱۷   د) ۱۸

حل: روش محاسبه حجم

۱-فرمول حجم $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

۲-تبدیل r بر حسب h، با توجه به شکل و استفاده از رابطه فیثاغورث $h^2 + r^2 = l^2$

$$\Rightarrow r^2 = l^2 - h^2 = (3\sqrt{3})^2 - h^2 = 27 - h^2$$

۳-جایگذاری r در رابطه حجم و محاسبه مشتق از v

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(27 - h^2\right)h = \frac{\pi}{3}\left(27 - h^3\right) \to v' = \frac{\pi}{3}\left(27 - 3h^2\right)$$

بعد از محاسبه مشتق، معادله $v' = 0$ را حل کرده و h را محاسبه می کنیم.

$$v' = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}\left(27 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = 3 \rightarrow v = \frac{1}{3}\pi\left(27 - 9\right)(3) = 18\pi$$

گزینه د صحیح است.

تست۲: در کره ای به شعاع $\sqrt{3}$، استوانه ای به حجم ماکزیمم محاط شده است. مقدار عددی حجم استوانه کدام است؟

الف) 2π ب) 3π ج) 4π د) 5π

حل: (شعاع کره $R=$ و شعاع مقطع استوانه $r=$)

$V = \pi r^2 h$ حجم استوانه

رابطه فیثاغورث

$$R^2 = x^2 + r^2$$
$$R^2 - x^2 = r^2$$
$$(\sqrt{3})^2 - x^2 = r^2 \Rightarrow 3 - x^2 = r^2$$
$$h = 2x$$

سپس h و r^2 در رابطه حجم جایگذاری کرده و از v نسبت به x مشتق می گیریم.

$$V = \pi r^2 h$$
$$V = \pi(3 - x^2)2x \Rightarrow \pi(6x - 2x^3) \rightarrow V' = 6\pi - 6\pi x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{3 - x^2 = r^2} r^2 = 2 \qquad h = 2$$
$$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi(2)(2) = 4\pi$$

گزینه ج صحیح است.

تست۳: مجموع دو عدد مثبت ۱۲ است. ماکزیمم مطلق حاصلضرب آن ها چند است؟

الف) ۲۶ ب) ۳۶ ج) ۱۶ د) ۴۶

حل: دو عدد x,yرا گرفته سپس از رابطه مجموع آنها یا x یا y را بدست آورده و در فرمول حاصلضرب آنها جایگذاری می کنیم سپس از طرفین مشتق گرفته و مساوی صفر قرار می دهیم

$$s=x+y=12 \Rightarrow x=12-y \qquad p=x\times y=(12-y)\times y=12y-y^2$$

$$\Rightarrow 12-2y=0 \Rightarrow y=6 \xrightarrow{x=12-y} x=6$$

گزینه ب صحیح است.

$\Rightarrow$ حاصلضرب ماکزیمم $=6\times 6=36$

توابع معکوس مثلثاتی و مشتقات آن ها

الف) معرفی تابع معکوس مثلثاتی

$$f(x)=\sin x \to f^{-1}(x)=\sin^{-1}x=Arc\sin x \qquad D_{f^{-1}}=[-1,\ 1] \quad D_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x)=\cos x \to f^{-1}(x)=\cos^{-1}x=Arc\cos x \qquad D_{f^{-1}}=[-1,\ 1] \quad D_{f^{-1}}=[0,\ \pi]$$

$$f(x)=\tan x \to f^{-1}(x)=\tan^{-1}x=Arc\tan x \qquad D_{f^{-1}}=R \quad \mathrm{R}_{f^{-1}}=\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x)=\cot x \to f^{-1}(x)=\cot^{-1}x=Arc\cot x \qquad D_{f^{-1}}=R \quad R_{f^{-1}}=(0,\pi)$$

$$f(x)=\sec x \to f^{-1}(x)=\sec^{-1}x=Arc\sec x$$

$$D_{f^{-1}}=(-\infty \quad -1]\cup[1 \quad +\infty) \quad R_{f^{-1}}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

$$f(x)=\csc x \to f^{-1}(x)=\csc^{-1}x=Arc\csc x$$

$$D_{f^{-1}}=(-\infty \quad -1]\cup[1 \quad +\infty) \quad D_{f^{-1}}=\left[\frac{-\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

ب) محاسبه مقدار توابع معکوس مثلثاتی در یک نقطه:

با مثال توضیح می دهیم.

$Arc\sin 1 = ?$. چه زاویه ای ۱ است $\sin \to Arc\sin 1 = \dfrac{\pi}{2}$

$Arc\tan(-1) = ?$. چه زاویه ای ۱- است $\tan \to Arc\tan(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$

محاسبه $Arc\csc x, Arc\sec x$ در یک نقطه:

$1)\sec^{-1} x = \cos^{-1}(\dfrac{1}{x})$ مثال: $\sec^{-1}(-1) = \cos^{-1}(-1) = \pi$

$2)\csc^{-1} x = \sin^{-1}(\dfrac{1}{x})$ مثال: $\csc^{-1}(2) = \sin^{-1}(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$

توجه مهم: زاویه هایی که برای توابع معکوس مثلثاتی بدست می آید. به شرطی قابل قبول هستند که در برد تابع معکوس مثلثاتی باشد.

ج) خواص توابع معکوس مثلثاتی

$$1)\quad Arc\sin(\sin u) = Arc\cos(\cos u) = Arc\tan(\tan u) = Arc\cot(\cot u)$$
$$= Arc\sec(\sec u) = Arc\csc(\csc u) = u$$

توجه: در رابطه های بالا اگر جای Arc با تابع مثلثاتی عوض شود باز هم جواب u است.

مثلاً $\sin(Arc\sin u) = u$

---

۲) $\sin(Arc\cos x) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad \cos(Arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$

تست: حاصل عبارت $\sin\left(Arc\cos(-\dfrac{3}{5})\right)$ کدام است؟

الف) $-\dfrac{4}{5}$ ب) $\dfrac{4}{5}$ ج) $\dfrac{7}{10}$ د) $-\dfrac{7}{10}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$\sin\left(Arc\cos(-\frac{3}{5})\right) = \sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

---

۳) $\tan(Arc\cot x)=\frac{1}{x}$ $\qquad$ $\cot(Arc\tan x)=\frac{1}{x}$

مثال: حاصل عبارت $\tan\left(\cot^{-1}\frac{3}{4}\right)+\cot\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ را بدست آورید؟

$$\tan\left(\cot^{-1}\frac{3}{4}\right)+\cot\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$$

---

۴)

$$y=\cos^{-1}x\to\cos y=x \qquad y=\sin^{-1}x\to\sin y=x$$

$$y=\cot^{-1}x\to\cot y=x \qquad y=\tan^{-1}x\to\tan y=x$$

$$y=\csc^{-1}x\to\csc y=x \qquad y=\sec^{-1}x\to\sec y=x$$

تست : جواب های معادله $Arc\sin(\cos x)=\frac{\pi}{3}$ در فاصله $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

الف) $\pm\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ ب) $\pm\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ ج) $\pm\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ د) $\pm\frac{\pi}{3}$

حل:

$$y=Arc\sin x\to\sin y=x$$

$$Arc\sin(\cos x)=\frac{\pi}{3}\to\cos x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\to x=\pm\frac{\pi}{6}$$

گزینه ای صحیح است که کسینوس آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد.

گزینه ب صحیح است.

۵) $$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

مثال:حاصل عبارت $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$ را بدست آورید؟

$$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)=\tan^{-1}\frac{(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{4})}{1-(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{4})}=\tan^{-1}\frac{\frac{-7}{12}}{\frac{11}{12}}=\tan^{-1}\left(\frac{-7}{11}\right)$$

---

۶) $$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$$

مثال: حاصل $\sin^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}\frac{1}{4}$ را بدست آورید؟

$$\sin^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}\frac{1}{4}=\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{1-(\frac{1}{4})^2}+\frac{1}{4}\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{12}+\frac{\sqrt{8}}{12}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{8}}{12}\right)$$

---

۷) $$Arc\tan x+Arc\tan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

تست: حاصل عبارت $Arc\tan\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+Arc\tan\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ کدام است؟

الف) π ب) $\frac{\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) $\frac{\pi}{4}$

حل: طبق خاصیت ۷ گزینه ج صحیح است.

$$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\rightarrow\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{x}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$1)\ \sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$2)\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$
$$3)\ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$
$$4)\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin y \sin x$$
$$5)\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \to \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$6)\ \sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$
$$7)\ \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$
$$8)\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$9)\ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

تست: مقدار $\sin(2\sin^{-1} 0/8)$ کدام است؟

الف) ۰/۴۸ ب) ۰/۶۴ ج) ۰/۷۲ د) ۰/۹۶

حل:نکته: برای محاسبه و حل تست همیشه داخل پرانتز به جز عدد ثابت را قرار دهید و از اتحاد مثلثاتی استفاده کنید.

$$\sin^{-1} 0/8 = x \to \sin x = 0/8 \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 = 1 - (0/8)^2 = 0/36 \Rightarrow \cos x = 0/6$$

$$\sin\left(\underbrace{2\sin^{-1} 0/8}_{x}\right) = \sin(2x) = 2\sin x \cos x \Rightarrow 2(0/8)(0/6) = 0/96$$

گزینه د صحیح است.

توجه: در محاسبات اگر داخل پرانتز دو عبارت به فرم نسبتهای مثلثاتی معکوس داشته باشیم باید یکی را x و دیگری را y بگیریم و از اتحادهای 3,4 استفاده کنید مانند تست زیر:

تست:مقدار $\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)\right]$ کدام است؟

الـف) $\frac{1-\sqrt{45}}{8}$ ب) $\frac{\sqrt{45}-1}{8}$ ج) $\frac{1+\sqrt{45}}{8}$ د) $-\frac{1+\sqrt{45}}{8}$

حل:گزینه ب صحیح است.

$$\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)=x\rightarrow\frac{-1}{2}=\sin x\Rightarrow\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)=y\rightarrow\frac{-1}{4}=\sin y\Rightarrow\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-\left(\frac{-1}{4}\right)^2$$

$$=\frac{15}{16}\Rightarrow\cos y=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos\left[\underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)}_{x}+\underbrace{\sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)}_{y}\right]=\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\Longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}-\left(\frac{-1}{2}\times\frac{-1}{4}\right)=\frac{\sqrt{45}-1}{8}$$

فرمول های مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$1)\,y=Arc\sin u\rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\qquad |u|<1$$

$$2)\,y=Arc\cos u\rightarrow y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\qquad |u|<1$$

$$3)\,y=\tan^{-1}\rightarrow y'=\frac{u'}{1+u^2}\qquad u\in R$$

$$4)\,y=\cot g^{-1}u\rightarrow y'=\frac{-u'}{1+u^2}$$

$$5)\,y=Arc\sec u\rightarrow y'=\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}\qquad |u|>1$$

$$6)\,y=Arc\csc u\rightarrow y'=\frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

تست۱ : اگر $f(x)=\cos^{-1}(x-\sqrt{x})$ باشد $f'(1)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{-1}{2}$ د) ۰

حل: گزینه ج صحیح است.

$$f'(x)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{-\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{1-\left(x-\sqrt{x}\right)^2}}\rightarrow f'(1)=\frac{-\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(1-\sqrt{1}\right)^2}}=\frac{-1}{2}$$

تست۲: معادله خط مماس بر نمودار $y=\sin^{-1}(2x+1)$ در نقطه $x=\frac{-1}{4}$ کدام است؟

الف) $2\sqrt{3}x+3y+\frac{\pi}{6}=0$ ب) $y=\frac{2}{3}\sqrt{3}(x+\frac{1}{4})+\frac{\pi}{4}$

ج) $4\sqrt{3}x+5y+\pi=0$ د) $4\sqrt{3}(x+\frac{1}{4})-3y+\frac{\pi}{2}=0$

حل: طبق آنچه که قبلاً گفته شده ابتدا شیب را بدست آورده یعنی از تابع مشتق گرفته و نقطه $x=\frac{-1}{4}$ را در آن جایگذاری می کنیم و تنها گزینه ای که شیب آن $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ است گزینه د است.

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\left(2x+1\right)^2}}\rightarrow f'(\frac{-1}{4})=\frac{2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

تست۳- اگر $f(x)=Arc\sin(\cos x)$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ مقدار $f'(x)$ کدام است؟

الف) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ب) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ج) ۱ د) ۱-

حل: گزینه د صحیح است.

فصل پنجم

کاربردهای مشتق(توابع صعودی و نزولی- نقاط $\min,\max$ - نقطه عطف و...)- قضایای رل و مقدار میانگین- کشی (تعمیم یافته مقدار میانگین)

نمایش صعودی و نزولی بدون نمودار تابع(صعودی و نزولی اکید)

۱-تابع صعودی

۲-نمودار تابع نزولی

نمایش نقاط Min,Max نسبی و Min,Max مطلق

الف)تعیین صعودی و نزولی بودن نمودار تابع با استفاده از مشتق اول

۱-مشتق تابع را بدست آورده و مساوی صفر قرار دهید و اعداد بدست آمده را در جدول قرار دهید.

۲-بعد از تعیین علامت هر جا که علامت مشتق اول (+) بود نمودار تابع صعودی و هر جا که در جدول علامت مشتق اول (-) بود نمودار تابع نزولی است.

تست: اگر $y=x^2-2x+10$ باشد تابع در کدام فاصله نزولی است؟

الف) $(0,+\infty)$ ب) $(+1,+\infty)$ ج) $(-\infty,0)$ د) $(-\infty,1)$

$$y'=2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

حل: گزینه د صحیح است.

	$-\infty$	1	$+\infty$
$y'=2x-2$	-		+

نکته: قبل از پیدا کردن اکسترممهای نسبی یا مطلق (Max یا Min) و یا صعودی و نزولی بودن آنها باید نقاط بحرانی را پیدا کنیم، سپس از روی جدول تعیین علامت اکسترممهای نسبی را را پیدا می کنیم.

پیداکردن نقطه بحرانی با استفاده از مشتق اول

برای پیداکردن نقطه بحرانی باید مشتق اول را بدست آورده و مساوی صفر قرار دهید. اعداد بدست آمده (ریشه های مشتق اول) را نقاط بحرانی می نامند.

توجه۱: اگر مشتق تابع کسر می شود برای بدست آوردن نقطه بحرانی باید هم صورت کسر و هم مخرج کسر را مساوی صفر قرار داد.

توجه۲: در توابع چند ضابطه ای اگر مقدار مشتق چپ و راست در یک نقطه با هم برابر نباشد نقطه را نقطه بحرانی می نامیم .

توجه۳: برای یک تابع نقطه های بحرانی باید در دامنه تابع باشند به عبارت دیگر ۱-نقاط بحرانی نباید مخرج کسر را در تابع اصلی صفر کنند و ۲-نباید زیر رادیکال با فرجه زوج را منفی کنند ۳-نقاط بحرانی نباید جلوی لگاریتم یا Ln را منفی یا صفر کنند.

مثال۱- اگر $f(x)=x^3-2x$ باشد نقاط بحرانی تابع را بدست آورید؟

حل: $f'(x)=3x^2-2=0 \Rightarrow 3x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

مثال۲- اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ باشد نقاط بحرانی تابع را بدست آورید؟

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

صورت کسر $=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$

مخرج کسر $=0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow 4=x^2 \Rightarrow x=\pm 2$

نقاط $x=0,\pm 2$ نقاط بحرانی (چون زیر رادیکال را منفی نمی کنند قابل قبول هستند).

مثال۳: نقاط بحرانی تابع $y=\frac{x^2}{x-1}$ را بدست آورید؟

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-1(x^2)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

صورت کسر $=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

مخرج کسر $=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \to x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x=1$ نمی تواند نقطه بحرانی باشد چون مخرج کسر تابع اصلی یعنی $y=\frac{x^2}{x-1}$ را صفر می کند پس فقط دو نقطه ۰ و۲ نقاط بحرانی هستند.

مثال۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ -x^2 & x\le 1\end{cases}$ باشد نقاط بحرانی را بدست آورید؟

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>1\\ -2x & x\le 1\end{cases}\qquad f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2x=2\Rightarrow & x=0\\ -2x=0\Rightarrow & x=0\end{cases}\to x=0$$

نقاط $x=0,1$ نقاط بحرانی است.

$f'_+(1)=2(1)=2$ مشتق راست در نقطه $x=1$

$f'_-(1)=-2(1)=-2$ مشتق چپ در نقطه $x=1$

چون مشتق سمت چپ و راست در نقطه $x=1$ برابر نیست پس نقطه $x=1$ نقطه بحرانی است پس نقاط $x=0,1$ نقاط بحرانی است.

تست۱- تابع $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$ در کدام فاصله صعودی است؟

الف) $(-1,+\infty)$ ب) $(-\infty,-1)$ ج) $(0,+\infty)$ د) $(-\infty,0)$

حل:

$$f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}\to f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}=0\Rightarrow\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=-\frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

$\to\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=\left(-x^{\frac{-2}{3}}\right)$ دو طرف رابطه را در $\frac{3}{4}$ ضرب می کنیم.

دوطرف رابطه را به توان مخرج هردوکسریعنی۳میرسانیم

$$\Rightarrow\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(-x^{\frac{-2}{3}}\right)^3\Rightarrow x=-x^{-2}\Rightarrow x=\frac{-1}{x^2}\Rightarrow x+\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\frac{x^3+1}{x^2}=0$$

$$x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1\Rightarrow x=-1$$

$$x^2=0\Rightarrow x=0$$

$x=-1,0$ نقاط بحرانی هستند

	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
x	-	-	+
$\sqrt[3]{x}\left(4x+4\right)$	+	-	+
	-□	+□	+□

گزینه ب صحیح است.

تست۱:نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}$ وقتی $x\in[0,4]$ باشد کدام است؟

الف) $\pm\frac{4}{9}$ ب) $0,\frac{4}{9}$ ج) $1,0,-4$ د) $0,-\frac{4}{9}$

حل:گزینه ب صحیح است.

$$f(x)=x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}-\frac{2}{4}x^{-\frac{3}{4}}=0\Rightarrow\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}\rightarrow$$

$3x^{\frac{-1}{4}}=2x^{\frac{-3}{4}}$ هر دو طرف را در ۴ ضرب می کنیم

$\rightarrow 81x^{-1}=16x^{-3}\Rightarrow\frac{81}{x}=\frac{16}{x^3}\Rightarrow\frac{81}{x}-\frac{16}{x^3}=0$ هردوطرف رابه توان۴ رسانده

$$\Rightarrow\frac{81x^2-16}{x^3}=0\begin{cases}18x^2-16=0\Rightarrow x^2=\frac{16}{81}\Rightarrow x=\pm\frac{4}{9}\\ x^3=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

تست۲:نقاط بحرانی تابع $f(x)=\cos^2x-\sin^2x-1$ کدام است؟

الف) $\frac{k\pi}{2}$ ب) $k\pi$ ج) $2k\pi$ د) $\frac{3k\pi}{2}$

حل: گزینه الف صحیح است.

در رابطه های مثلثاتی داریم $\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$ پس از تابع $y=\cos2x-1$ مشتق می گیریم.

$$y=\cos 2x-1 \rightarrow y'=-2\sin 2x=0$$

$$\Rightarrow \sin 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

تعیین نقاط min, max مطلق در فاصله $[a,b]$

۱-مشتق اول تابع را بدست آورده و مساوی صفر قرار دهید. (پیداکردن نقاط بحرانی)

۲-باید مقدار تابع اصلی را در نقاط $[a,b]$ و در نقاطی که ریشه های مشتق (نقاط بحرانی) هستند بدست آورید.

۳-از بین مقادیر بدست آمده برای تابع f ، نقطه ای که مقدار تابع در آن از بقیه بیشتر باشد نقطه max مطلق و نقطه ای که مقدار تابع در آن از بقیه کمتر باشد نقطه min مطلق نام دارد.

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=3x^4-4x^3$ را در فاصله $[-1,2]$ بدست آورید؟

حل:

$$f'=12x^3-12x^2=0 \Rightarrow x^2(12x-12)=0 \Rightarrow x^2=0$$

$$12x-12=0 \Rightarrow x=1$$

$x=0 \rightarrow f(0)=0$

$x=1 \rightarrow f(1)=-1 \Rightarrow (1,-1)$ min مطلق

$x=-1 \rightarrow f(-1)=7$

$x=2 \rightarrow f(2)=16 \Rightarrow (2,16)$ max مطلق

توجه: همواره مقدار تابع در نقطه max مطلق را بیشترین مقدار تابع نیز می نامند و به مقدار تابع در نقطه min مطلق کمترین مقدار تابع می گویند. در مثال قبل بیشترین مقدار تابع ۱۶

کمترین مقدار تابع ۱-

تذکر: اگر مشتق تابع کسر می شود برای تعیین max و min مطلق باید علاوه بر صورت کسر، مخرج کسر را نیز مساوی صفر قرار داد و مقدار تابع را برای آن ها محاسبه کرد (که این مطلب قبلاً در بدست آوردن نقطه بحرانی گفته شد)

مثال: max و min مطلق تابع $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-3)^2}$ در فاصله $[-5,4]$ را بدست آورید؟

$f'(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x-3}} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$f(3)=1 \rightarrow$ بیشترین مقدار تابع $\leftarrow 1$ = مطلق max $(3,1)$

$f(-5)=-3 \rightarrow$ کمترین مقدار تابع $\leftarrow -3$ = مطلق min $(-5,-3)$

$f(4)=0$

کاربرد مشتق دوم -تعیین نقاط max و min نسبی

ابتدا مشتق اول را بدست آورده و مساوی صفر قرار می دهیم سپس اعدا بدست آمده از مشتق اول را در مشتق دوم تابع قرار دهید، اعدادی که برای آن ها علامت مشتق دوم + باشد آن نقاط minنسبی هستند و اعدادی که برای آن ها علامت مشتق دوم - باشد آن نقاط maxنسبی هستند.

مثال: اگر $y=x^3-3x-1$ نقاط نسبیmax و min تابع را پیدا کنید؟

نقاط بحرانی $y'=3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

مشتق اول

مشتق دوم $y''=6x\begin{cases} y''(1)=+6>0 \Rightarrow x=1 & \min \\ y''(-1)=-6<0 \Rightarrow x=-1 & \max \end{cases}$

توجه مهم: بعضی مواقع ممکن است که مقدار مشتق دوم در ریشه های مشتق اول صفر شود در این حالت برای تعیین maxیا min بودن آن نقطه باید به جای مشتق دوم از جدول تعیین علامت مشتق اول استفاده کرد. اگر قبل و بعد از آن نقطه در جدول، علامت مشتق اول تغییر کند آن نقطه maxیا minنسبی خواهد بود و اگر علامت مشتق اول در جدول قبل و بعد از هر نقطه تغییر نکرد maxیا min نخواهد بود.

	$-\infty$	a	$+\infty$
مشتق اول	$-$		$+$

	$-\infty$	a	$+\infty$
مشتق اول	$+$		$-$

نقطه x=aدرجدول راست minنسبی ودرجدول چپmax نسبی هست ولی در دوجدول زیرx=aنه maxنه minنسبی هست

	$-\infty$	a	$+\infty$
مشتق اول	$+$		$+$

	$-\infty$	a	$+\infty$
مشتق اول	$-$		$-$

نکته: معمولاً روش تعیین اکسترممهای نسبی با استفاده از آزمون دوم مشتق برای توابع مثلثاتی کاربرد بیشتری دارد.

مثال: نوع نقاط بحرانی (نوع نقاط اکسترمم نسبی) تابع $f(x)=3x^4+4x^3$ را بدست آورید؟

$$f'(x)=12x^3+12x^2=0 \Rightarrow x^2(12x+12)=0 \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 12x+12=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$ مشتق اول

نقطه $x=-1$ min نسبی $f''(x)=36x^2+24x \Rightarrow f''(-1)=36-24=12>0$ مشتق دوم

برای $x=0$ نقطه داریم $f''(0)=0$ لذا از مشتق دوم نمی توان برای تعیین max یا min نسبی استفاده کرد و باید برای نقطه $x=0$ از جدول مشتق اول استفاده کرد و برای تعیین علامت ان می توان از عدد گذاری استفاده کرد باید یک عدد قبل از صفر و یک عدد بعد از صفر را به جای x در مشتق قرار داد و علامت جدول را تعیین کرد.

عددقبل از صفر $\begin{cases} x=-1 \to 12(-1)^3+12(-1)^2=0 \\ x=-2 \to 12(-2)^3+12(-2)^2=12\times -8+12\times 4<0 \to - \end{cases}$

عدد بعد از صفر $x=1 \Rightarrow 12(1)^3+12(1)^2=24>0 \to +$

	$-\infty$	0 $+\infty$
$12x^3+12x^2$	$-$	$+$

تذکر: منظور از نوع نقاط بحرانی و یا نقاط اکسترمم تابع همان نقاط max یا min نسبی تابع می باشد.

تست: در مورد تابع $f(x)=3x^5-5x^3$ کدام گزینه صحیح است؟

الف) $x=\pm 1$ نقاط اکسترمم نسبی و نقطه $x=0$ نقطه min نسبی است.

ب) $x=\pm 1$ نقاط اکسترمم نسبی و نقطه $x=0$ نقطه max نسبی است.

ج) $x=1$ نقطه min نسبی و نقطه x=-1 max نسبی و نقطه $x=0$ نقطه min نسبی است.

د) نقطه $x=1$ نقطه min نسبی و $x=-1$ نقطه max نسبی و $x=0$ نقطه بحرانی است.

حل: در این تست نیازی به پیداکردن ریشه های مشتق اول نیست چون تمامی گزینه ها در مورد سه عدد1,-1,0 هست بلکه فقط اعداد $-1,+1,0$ را در مشتق دوم قرار می دهیم.

$f'(x)=15x^4-15x^2 \to f''(x)=60x^3-30x$

$f''(1)=60-30=30>0 \qquad x=1 \qquad \min$

$f''(-1)=-60+30=-30<0 \qquad x=-1 \qquad \max$

و چون $f''(x)=0$ باید از جدول مشتق اول استفاده کرد:

	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$	
$15x^4-15x^2$	+	+

چون در دو طرف نقطه صفر هم علامت شد سپس max یا min نیست و فقط نقطه بحرانی است و گزینه د صحیح است.

خاصیت نقطه max و min نسبی

اگر نقطه $A=(a,b)$ یک نقطه max یا min نسبی باشد:

۱-مختصات نقطه max یا min (عرض و طول) در معادله تابع صدق می کند.

۲-طول نقطه max یا min را اگر در مشتق اول قرار دهید مقدار مشتق را صفر می کند.

مثال۱-مقدار عدد a را طوری پیدا کنید که $x=-1$ طول نقطه max نسبی تابع $f(x)=ax^2+3x-1$ باشد؟

حل: اگر فقط طول نقطه max را بدهد برای پیدا کردن a باید از خاصیت ۲ استفاده کرد.

$$f'(x)=2ax+3=0 \xrightarrow{x=-1} 2a(-1)+3=0 \Rightarrow -2a+3=0 \Rightarrow -2a=-3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

تست: اگر $A(-1,1)$ نقطه min نسبی تابع $f(x)=ax^2+bx$ باشد حاصل a-2b کدام گزینه است؟

الف) ۵ ب) ۵- ج) ۳ د) ۳-

حل: طبق خاصیت ۱ نقطه $A(-1,1)$ را در معادله تابع جایگذاری کرده $1=a-b$

طبق خاصیت ۲: جایگذاری طول نقطه در مشتق اول

$$f'(x)=2ax+b=0 \xrightarrow{x=-1} -2a+b=0$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ \underline{-2a+b=0} \end{cases}$$

$$-a=1 \Rightarrow a=-1 \rightarrow -1-b=1 \Rightarrow b=-2$$

$$\Rightarrow a-2b=--2(-2)=3$$

گزینه ج صحیح است.

پیدا کردن نقطه عطف با استفاده از مشتق دوم:

باید مشتق دوم را بدست آورده و مساوی صفر قرار دهید با استفاده از جدول تعیین علامت مشتق دوم اگر قبل و بعد از نقطه علامت مشتق دوم عوض شد نقطه را نقطه عطف می نامند. نقطه عطف جایی است که جهت تقعر و تحدب تابع عوض می شود (به شرط آنکه نقطه مورد نظر که در دامنه تابع باشد)

مثال: اگر $f(x)=x^3+5x^2-10$ باشد نقطه عطف تابع را پیدا کنید؟

$$f'(x)=3x^2+10x \rightarrow f''(x)=6x+10=0 \Rightarrow 6x=-10 \Rightarrow x=\frac{-10}{6}=\frac{-5}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5}{3}$$

	$-\infty$	$\frac{-5}{3}$	$+\infty$
$6x+10$	$-\cap$		$+\cup$

خاصیت نقطه عطف:

۱-مختصات نقطه عطف در معادله تابع صدق می کند.

۲-طول نقطه عطف مقدار مشتق دوم را صفر می کند.

مثال: اگر $y=x^3+ax^2+b$ باشد b,a را طوری پیدا کنید که نقطه عطف منحنی $A(1,2)$ باشد؟

حل:طبق خاصیت۱ نقطه عطف را در منحنی جایگذاری کرده

$$2=1+a+b \Rightarrow a+b=1$$

و طبق خاصیت ۲ طول نقطه عطف را در مشتق دوم قرار داده

$$f'(x)=3x^2+2ax \rightarrow f''(x)=6x+2a=0$$

$$\xrightarrow{x=1} f''(1)=6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

$$a+b=1 \xrightarrow{a=-3} -3+b=1 \Rightarrow b=4$$

نمودارهای مقعر(تعقر به سمت بالا ∪) و نمودارهای محدب (تعقر به سمت پایین ∩)

تعیین محدب یامقعر بودن تابع بااستفاده از مشتق دوم:

مشتق دوم را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار دهید، هر جا در جدول تعیین علامت مشتق دوم، علامت + بود تابع مقعر و هر جا علامت _ بود تابع محدب است مثال

	$-\infty$	a	$+\infty$
مشتق دوم	∪ +		− ∩

تذکر۱- در تست ها معمولاً می توان از روی گزینه ها مثبت یا منفی بودن مشتق دوم را بدون رسم جدول تعیین کرد.

تذکر۲- بعضی مواقع ممکن است در جدول مشتق دوم تغییر علامت داشته باشم ولی نقطه، نقطه عطف نباشد (در واقع باید نقطه عطف در دامنه تابع اصلی باشد).

تست۱-اگر جهت تقعر منحنی $y=x^3+2ax^2+a$ در $x=1$ عوض شود. aکدام است؟

الف) $\frac{-3}{2}$ ب) $\frac{-2}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{3}{2}$

حل: نقطه $x=1$ را در مشتق دوم جایگذاری کرده

$$f'(x)=3x^2+4ax \rightarrow f''(x)=6x+4a=0$$

$$\xrightarrow{x=1} f''(1)=6+4a=0 \Rightarrow 4a=-6 \Rightarrow a=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$$

گزینه الف صحیح است.

تعیین max و min نسبی برای چند تابع خاص:

تابع چند ضابطه ای: بعد از محاسبه مشتق نقاطی در جدول تعیین علامت قرار می گیرند که ریشه های مشتق و یا نقاطی باشند که تابع در آن نقاط مشتق ندارد. روش بدست آوردن نقاط max یا min را در مثال زیر توضیح دهیم:

تست۱: کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}-3x+5 & x\geq 2\\ x^2-5 & x<2\end{cases}$ صحیح است؟

الف)تابع در $x=2$ به نسبی min می رسد.

ب)تابع در $x=0$ به نسبی max می رسد.

ج)نقاط $x=0,2$ نقاط بحرانی ودر $x=2$ تابع مقعر است.

د) $x=0,2$ نقاط بحرانی و در $x=0$ تابع min نسبی و در x=2 تابع max نسبی دارد.

حل:

$$f'(x)=\begin{cases}-3 & x\geq 2\\ 2x & x<2\end{cases}\to f'(x)=0\Rightarrow \quad 2x=0\Rightarrow x=0$$

چون مشتق چپ و راست در نقطه ۲ برابرنشدپس نقطه ۲ هم نقطه بحرانی

$f'_+(2)=-3 \quad f'_-(2)=2(2)=4\Rightarrow$

جدول تعیین علامت :

	$-\infty$ 0	2	$+\infty$
۳-	-	-	-
2x	-	+	+
	□	□	□

گزینه د صحیح است.

تست۲: کدام گزینه در مورد تابع $\left|x^2-2x\right|$ صحیح است؟

الف) نقاط $x=0,1$ و فقط بحرانی هستند.

ب) نقاط $x=0,2$ min نسبی و $x=1$ max نسبی است.

ج) نقاط $x=0,2$ max نسبی و $x=1$ min نسبی هستند.

د) هر سه نقطه $x=0,1,2$ max نسبی هستند.

حل: نکته: چون تابع قدر مطلق دارد باید ریشه های عبارت داخل قدرمطلق را بدست آوریم و با توجه به آن ها مشتق را محاسبه و تعیین علامت کنیم.

$x^2-2x=0\Rightarrow x=0,2$

	$-\infty$ 0 2 $+\infty$

x^2-2x	+	-	+

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & x\langle 0\\ -2x+2 & 0\langle x\langle 2\\ 2x-2 & x\rangle 2\end{cases}$$

	$-\infty$ 0	1	2	$+\infty$
2x-2	-	-	+	+
-2x+2	+	+	-	-
	□	□	□	□

گزینه ب صحیح است.

قضایای رل، مقدار میانگین و قضیه کشی (میانگین تعمیم یافته) در مشتق:

قضیه رل: شرایط قضیه

۱- فاصله $[a,b]$ باید در دامنه تابع اصلی باشد.

۲-فاصله (a,b) باید در دامنه مشتق تابع باشد.

۳-باید $f(a)=f(b)$ باشد.

اگر شرایط بالا برقرار بود می توان حداقل یک عدد ثابت مانند c در فاصله (a,b) پیدا کرد که مشتق تابع در c برابر صفر خواهد بود یعنی $f'(c)=0$

تذکر: عدد c باید حتماً در فاصله (a,b)باشد در غیر این صورت عدد بدست آمده قابل قبول نیست.

تست: عدد ثابت c در قضیه رل برای تابع $f(x)=x^4-4x^2$ در فاصله $[0,2]$ کدام است؟

الف) $c=\sqrt{2}$ ب) $c=-\sqrt{2}$ ج) $c=0$ د) $c=0,\sqrt{2}$

حل: فاصله $[0,2]$ در دامنه تابع اصلی قرار دارد چون دامنه تابع R است و فاصله $(0,2)$ در دامنه مشتق قرار دارد چون باز هم دامنه مشتقR است و در ضمن $f(0)=f(2)=0$ پس شرایط قضیه رل برقرار است.

$$\to f'(x)=4x^3-8x=0 \Rightarrow x(4x^2-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x^2-8=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

در بین سه عدد بدست آوده $-\sqrt{2},\sqrt{2},0$ فقط $\sqrt{2}$ در فاصله $(0,2)$ قرار دارد پس گزینه الف صحیح است.

تذکر: به طور کلی برای بدست آوردن عدد ثابت c در قضیه رل اگر همه شرایط قضیه برقرار باشد ابتدا از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم اگر ریشه های بدست آورده از مشتق در فاصله مورد نظر قرار بگیرند، عدد ثابت خواهند بود.

۲-قضیه مقدار میانگین

شرایط قضیه :

۱-فاصله $[a,b]$ باید در دامنه تابع اصلی باشد.

۲-فاصله (a,b) باید در دامنه مشتق تابع باشد.

اگر شرایط قضیه برقرار باشد در این صورت می توان حداقل یک عدد ثابت مانندc در فاصله (a,b)پیدا کرد که رابطه روبرو برقرار باشد. برای پیدا کردن از همین رابطه استفاده می کنیم.

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$$

مثال: مقدار عدد ثابت c در قضیه مقدار میانگین برای تابع $f(x)=x^3-3x+1$ در فاصله $[0,3]$ را بدست آورید؟

حل: فاصله $[0,3]$ در دامنه تابع قرار دارد و فاصله $(0,3)$ در دامنه مشتق تابع قرار دارد سپس شرایط قضیه برقرار است برای محاسبه c از رابطه $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ استفاده می کنیم.

$$f'(x)=3x^2-3=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}\Rightarrow 9x^2-9=19-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow c=\sqrt{3}$$

بین دو نقطه بدست آمده فقط $\sqrt{3}$ در فاصله $(0,3)$ قرار دارد و قابل قبول است.

۳-قضیه کشی (مقدار میانگین تعمیم یافته)

در قضیه کشی دو تابع g,f و فاصله $[a,b]$ را داریم:

شرایط قضیه:

۱-باید فاصله $[a,b]$ هم در دامنه و هم در دامنه g باشد.

۲-باید فاصله (a,b) در دامنه های مشتق f و مشتق g باشد.

۳-مشتق تابع g نباید در فاصله (a,b) صفر شود.

در این صورت برای c محاسبه داریم:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

مانند مثال ۴-۲-۱۲ صفحه ۲۸۹

تذکر: بعضی مواقع از شرایط قضیه رل در بدست آوردن مقادیر مجهول استفاده می شود.

تست۱: اگر تابع $f(x)=x^3-bx^2+ax+1$ در فاصله $[-1,2]$ در نقطه $c=1$ در شرایط رل صدق کند کدام است؟

الف) ۳- ب) ۲- ج) ۲ د) ۳

حل:

$$f(-1)=f(2)\Rightarrow -1-b-a+1=8-4b+2a+1\Rightarrow$$
$$3b-3a=9\Rightarrow b-a=3$$
$$f'(c)=0\Rightarrow f'(1)=0\rightarrow f'(x)=3x^2-2bx+a\rightarrow$$
$$f'(1)=0\Rightarrow 3-2b+a=0\Rightarrow a-2b=-3$$
$$\begin{cases}-a+b=3\\ \underline{a-2b=-3}\end{cases}$$
$$-b=0\rightarrow b=0\rightarrow a=-3$$

گزینه الف صحیح است.

تست۲- نقطه $x=\frac{\pi}{4}$ برای تابع $f(x)=\tan x+\cot x$ نقطه...... است.

الف) max نسبی ب) min نسبی ج) عادی د) نقطه عطف

گزینه ب صحیح است (با استفاده از آزمون دوم مشتق برای تعیین اکسترممهای نسبی)

تست۳-مقدار عدد c در قضیه رل برای تابع $f(x)=x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}$ در فاصله $[0,4]$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{9}$ ب) $\frac{2}{9}$ ج $\frac{4}{9}$ د) $\frac{5}{9}$

گزینه ج صحیح است.

تست۴-طول یکی ازنقاط عطف نمودارتابع $f(x)=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

الف) ۳۶ ب) ۳۶- ج) ۲۱۶ د) ۲۱۶-

گزینه ج صحیح است.

تست۵-ارتفاع مخروطی که در کره به شعاع واحد با حجم ماکزیمم محاط شده است کدام گزینه است؟

الف) $\frac{2}{3}$ ب) ۱ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{5}{3}$

حل: گزینه ج صحیح است.

ارتفاع مخروط $h=1+x$

حجم مخروط $v=\frac{1}{3}\pi R^2 h$

قضیه فیثاغورث $\Rightarrow 1^2=x^2+R^2 \Rightarrow R^2=1-x^2$

$$\Rightarrow v=\frac{1}{3}\pi\left(1-x^2\right)\left(1+x\right)\Rightarrow v'=\frac{1}{3}\pi\left[\left(-2x\right)\left(1+x\right)+\left(1-x^2\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x-1=0$$

$$\Rightarrow x=-1, x=\frac{1}{3}\Rightarrow h=1+x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

تست۶- اگر برای $x\geq 0$ داشته باشیم $2x\leq f(x)\leq x^2+1$ مقدار $f'(1)$ کدام است؟

الف) صفر ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۲ د) ۳

حل: گزینه ج صحیح است. $2x\leq f\left(x\right)\leq x^2+1$

$$\rightarrow 2\leq f'(x)\leq 2x \longrightarrow 2\leq f'(1)\leq 2x \xrightarrow{x=1} 2\leq f'(1)\leq 2 \Rightarrow f'\left(1\right)=2$$

تست۷: تابع $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+5}$ دربازه $[-1,3]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کند. مقدار c مربوطه کدام است؟

الف) $5\pm\sqrt{32}$ ب) $-5-\sqrt{32}$ ج) $-5+\sqrt{32}$ د) $-5\pm\sqrt{32}$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x-2)(x+5)-(x^2-2x-3)}{(x+5)^2}=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+10x-7}{(x+5)^2}=\frac{0}{4}=0$$

$$f'(c)=0\Rightarrow \frac{c^2+10c-7}{(x+5)^2}=0\Rightarrow c^2+10c-7=0\begin{cases}c_1=-5+\sqrt{32}\\ c_2=-5-\sqrt{32}\end{cases}$$

c_2 در فاصله $(-1,3)$ قرار ندارد پس فقط c_1 قابل قبول است.

(پیدا کردن تعداد ریشه های معادله درجه n)

هرمعادله به فرم

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\dots+a_1x+a_0=0$$
$$(a_n\in R, n\in N)$$

رایک چندجمله ای ازدرجه n می نامند

هر معادله درجه n حداکثر می تواند n ریشه داشته باشد.

معادله به فرم $x^n+ax+b=0$

الف) اگر n عددی مثبت و زوج باشد معادله حداکثر ۲ ریشه حقیقی دارد.

ب) اگر n عددی فرد و طبیعی باشد معادله حداکثر ۳ ریشه حقیقی دارد.

۲-معادله $x^{2n+1}+ax+b=0$ اگر $a>0$ باشد دقیقاً یک ریشه دارد.

۳-هر معادله به فرم $f(x)=0$ در فاصله $[a,b]$، اگر $f(b),f(a)$ مختلف العلامه باشند (یعنی $f(a)f(b)<0$) و $f'(x)$ به ازای

تمام مقادیر x در فاصله (a,b) مخالف صفر باشد، می توان گفت معادله $f(x)=0$ در فاصله $[a,b]$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۴-هر معادله $f(x)=0$ پیوسته در فاصله $[a,b]$ ، اگر $f(a), f(b)$ مختلف العلامه باشند (یعنی $f(a)f(b)<0$) آنگاه می توان گفت معادله در فاصله (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

۵-اگر f تابعی پیوسته و مشتق پذیر باشد و f' دارای n ریشه باشد آنگاه f حداکثر $n+1$ ریشه دارد

تست ۱: اگر $f(x)=4x^5+3x^3+3x-2$ باشد در این صورت کدام گزینه در مورد تعداد ریشه های تابع در فاصله $[0,1]$ درست است؟

الف) حداقل یک ریشه　　　　ب) حداکثر یک ریشه

ج) دقیقاً یک ریشه　　　　د) دقیقا دو ریشه

حل: طبق نکته ۳ پس

$$\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(1)=8 \end{cases} \rightarrow f(0)f(1)<0$$

$$f'(x)=20x^4+9x^2+3\neq 0$$

دقیقاً یک ریشه دارد و گزینه ج صحیح است.

۶-درمعادله $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x=0$ اگر $x=r$ یک ریشه مثبت معادله باشد در این صورت معادله مشتق آن حداقل یک ریشه مثبت کوچکتر از دارد.

تست۲: اگر $f(x)=x^5+2x^3-x^2-2$ و $x=r$ یک ریشه مثبت معادله باشد در مورد ریشه های معادله $5x^4+6x^2-2x=0$ چه می توان گفت؟

الف) حداکثر یک ریشه مثبت و کوچکتر از r دارد.

ب) تمام ریشه های معادله از r بزرگتر هستند.

ج) فقط یک ریشه مثبت کوچکتر از r دارد.

د) حداقل یک ریشه مثبت و کوچکتر از r دارد.

حل: گزینه د صحیح است

۷-در یک چند جمله ای از درجه n تعداد تغییر علامت های ضرائب چند جمله ای $f(x)$ حداکثر تعداد ریشه های مثبت و تعداد تغییر علامت ضرائب $f(-x)$ حداکثر تعداد ریشه های منفی را مشخص می کند. مثلاً اگر ضرائب $f(x)$ پنج بار تغییر علامت دهید f دارای حداکثر ۵ ریشه خواهد بود.

تست۳- معادله $x^9+4x^7+3x+11=0$ حداکثر چند ریشه حقیقی دارد؟

الف) یک ریشه ب) دو ریشه ج) ۹ریشه د) ریشه حقیقی ندارد.

حل: گزینه الف صحیح است چون خود تابع f تغییر علامت ندارد ولی $f(-x)$ یک تغییر علامت دارد پس حداکثر ۱ ریشه دارد.

(مجانب ها)

مجانب یعنی یک خط راست که در بی نهایت با منحنی $y=f(x)$ موازی شود

الف) مجانب قائم: از ۲ راه مجانب قائم بوجود می آید:

۱-مخرج کسرها صفر شود.

۲-عبارت جلوی $\log$ یا $\ln$ صفر شود.

نکته مهم: پس از یافتن مجانب قائم دقت کنید. که بعد از جایگذاری نقطه در تابع اصلی عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج را منفی نکند.

مثال: برای تابع $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2-x}+\frac{Ln(x-2)}{x+3}$ مجانب قائم را بیابید؟

$$x^2-2=0 \to x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$x+3=0 \to x=-3$$

$$x-2=0 \to x=2$$

$x=-3$ قابل قبول نیست چون $\sqrt{x+2}$ را منفی می کند.

۲)مجانب افقی هر تابعی حداکثر ۲ مجانب افقی دارد برای بدست آوردن مجانب افقی باید از تابع حد بگیریم یعنی $y=\lim_{x\to-\infty} f(x), y=\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و را بدست بیاوریم. در محاسبه این حدها اگر تابع کسر باشد و صورت و مخرج کسر، چند جمله ای باشد ، حاصل حد به صورت زیر خواهد بود.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n+\dots+a_1 x+a_0}{b_n x^n+\dots+b_1 x+b_0}$$

۱)اگر درجه صورت > درجه مخرج $\Rightarrow y=\infty$

۲)اگر درجه صورت < درجه مخرج $\to y=0$

۳)اگر درجه صورت = درجه مخرج $\to y=\frac{a_n}{b_n}$

در حالت اول یعنی وقتی درجه صورت بیشتر از درجه مخرج باشد و حاصل حد ∞ شود مجانب افقی وجود ندارد

مثال: مجانب های افقی و قائم $y=\frac{x^2-x}{x^2+2x}$ را بدست آورید؟

حل:

مخرج =۰ ⟶ مجانب قائم

$$x+2x=0 \rightarrow x\left(x+2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

$x=0,2$ مجانب قائم

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x}{x^2+2x}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow y=1$ مجانب افقی

ج)مجانب مایل: فقط دو نوع از توابع هستند که مجانب مایل دارند.

۱-رادیکال هایی که فرجه آن ها با درجه متغیر x زیر رادیکال یکی باشد و برای نوشتن مجانب کافی است همان هم ارزی رادیکال ها استفاده شود.

$$y=\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\ldots} \;\square\; \sqrt[n]{a}\left|a+\frac{b}{na}\right|$$

۲-توابع کسری گویا یعنی $f(x)=\frac{ax^{n+1}+\ldots}{bx^n+\ldots}$ که درجه صورت دقیقاً یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد، برای یافتن مجانب مایل چند جمله ای صورت را بر چندجمله ای مخرج تقسیم می کنیم، خارج قسمت تقسیم که به صورت $y=ax+b$ بدست می آید همان مجانب مایل است.

تست: در تابع $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2c}$ اگر خط $x=-4$ مجانب عمودی و خط $y=x-1$ مجانب مایل تابع باشد، مقادیر c,b,a کدام است؟

د)	ج)	ب)	الف)
$a=1$, $b=3$, $c=2$	$a=1$, $b=3$, $c=3$	$a=1$, $b=2$, $c=3$	$a=2$, $b=3$, $c=1$

حل گزینه د صحیح است.

چون خط $x=-4$ مجانب قائم تابع هست پس باید مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده

$$x+2c=0 \Rightarrow x=-2c \xrightarrow{x=-4} -2c=-4 \Rightarrow c=2$$ سپس

معادله تابع را با معادله خط مجانب مایل مساوی هم قرار داده

$$\begin{cases} y=\dfrac{ax^2+bx+2}{x+4} \\ y=x-1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{ax^2+bx+2}{x+4}=x-1 \Longrightarrow$$

$$ax+bx+2=(x-1)(x+4)$$

$$\Longrightarrow ax^2+bx+2=x^2+3x-4 \Longrightarrow$$

$$x^2(a-1)+x(b-3)+6=0$$

و یک چند جمله ای وقتی مساوی صفر می شود که ضرائب متغیرها صفر شود پس

$$a-1=0 \Rightarrow a=1$$

$$b-3=0 \rightarrow b=3$$

نکته: بعضی مواقع توابع داده شده نه به صورت حالت اول (یعنی رادیکالی) و نه به صورت حالت دوم (یعنی کسری که درجه صورت آن یک واحد بیشتر از مخرج باشند) هستند و برای پیدا کردن مجانب مایل آنها نمی توان از

روشهای گفته شده استفاده کرد بلکه باید از فرمول زیر برای پیدا کردن مجانب‌مایل

$y = ax + b$ استفاده کنیم.

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

تست: مجانب مایل تابع

$f(x) = x(2e^{-x} - 1)$ کدام است؟

الف) $y = -2x - 1$ ب) $y = -2x + 1$ ج) $y = -x$ د) $y = -x + 1$

حل: گزینه ج صحیح است.

فصل ششم

تست های مربوط به آزمون های دورهای فراگیرپیام نور
مباحث:مشتق وکاربردهای آن

) اگر $f(x)=\ln\sqrt{x}$ مقدار $\dfrac{f(e)}{1+f'(e)}$ کدام است؟

الف) $\dfrac{e}{1+2e}$ ب) ۱   ج) 0 د) $\dfrac{2e}{1+2e}$

گزینه د صحیح است.

---

۲) اگر $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ باشد مقدار $2f'(8)-f'(64)$ کدام است.

الف) $\dfrac{1}{3}$ ب) $\dfrac{1}{6}$ ج) $\dfrac{1}{4}$ د) $\dfrac{1}{5}$

گزینه الف صحیح است.

---

۳) اگر $f(x)=\log_3\left(\log_e^x\right)$باشد مقدار مشتق تابع در نقطه $x=e^2$ کدام است؟

الف) 1 ب) $\dfrac{2\ln 3}{e^2}$ ج) $\dfrac{1}{2\ln 3}$ د) $\dfrac{1}{2e^2\ln 3}$

گزینه د صحیح است.

---

۴) حاصل $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ کدام گزینه است؟

الف) $\dfrac{-1}{4}$ ب) $\dfrac{1}{4}$ ج) ۴   د) ۴−

گزینه ب صحیح است.

---

۵) اگر $f(x)=\sqrt[7]{\left(x^2+3x-3\right)^5}$ باشد حاصل $f'(1)$ کدام است؟

الف) $\frac{25}{4}$ ب) $\frac{25}{6}$ ج) $\frac{25}{7}$ د) $\frac{25}{8}$

گزینه ج صحیح است.

---

۶) اگر $f(x)=\ln^2\left(\ln(\sqrt{x})\right)$ مقدار $f'(x)$ در نقطه $x=e$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{2}{e}Ln2$ ج) $\frac{2e}{Ln2}$ د) $\frac{-2}{e}\ln 2$

گزینه د صحیح است.

---

۷) اگر $f(x)=e^{x^2-1}+\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)$ حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ کدام است؟

الف) $\frac{5}{4}$ ب) $\frac{7}{4}$ ج) $\frac{9}{4}$ د) $\frac{11}{4}$

گزینه د صحیح است.

---

۸) اگر $f'(\frac{3}{4})=2\sqrt{3}, g(x)=\sin^2\frac{\pi}{x}, h(x)=fog(x)$ مقدار $h'(3)$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{-\pi}{3}$ ج) $\frac{-\pi}{6}$ د) $\frac{\pi}{6}$

گزینه ب صحیح است.

---

۹) اگر $g(x)=f(x^2), f(x)=x^2$ حاصل $f'(x^2)$ کدام است؟

الف) x^4 ب) $2x^4$ ج) $4x^3$ د) $4x^2$

گزینه ج صحیح است.

---

۱۰) اگر $\begin{cases} f(a)=0 \\ f'(a)=4 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{5h}$ کدام است؟

الف) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{4}{5}$ ج) $\frac{8}{5}$ د) $\frac{6}{5}$

گزینه ج صحیح است.

---

۱۱) فرض کنید معادله حرکت توپی روی خط مستقیم باشد. در چه لحظه ای سرعت این توپ برابر ۱ است؟

الف) $\frac{-1}{3}\left(3-\sqrt{12}\right)$ ب) $\frac{1}{3}\left(-3-\sqrt{12}\right)$ ج) $\frac{1}{3}\left(3+\sqrt{12}\right)$ د) $\frac{1}{3}\left(-3-\sqrt{12}\right)$

گزینه ج صحیح است.

چون در مورد سرعت توپ صحبت شده باید از معادله حرکت آن یکبار مشتق گرفته و مساوی ۱ قرار دهیم.

$$v(t)=s'(t)=3t^2-6t=1 \Rightarrow 3t^2-6t-1=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{12}}{3} \Rightarrow t=\frac{3+\sqrt{12}}{3}=\frac{1}{3}\left(3+\sqrt{12}\right)$$

---

۱۲) اگر $e^{x^2}=x^2-e^y$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $A\left(1,Ln(1-e)\right)$ کدام است؟

الف) $\frac{2}{e}$ ب) $2e-1$ ج) ۲- د) ۲

گزینه د صحیح است.

---

۱۳) اگر $\sin(xy)=\cos(xy)$ مقدار $\frac{dy}{dx}\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

الف) $-\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) $\frac{-\pi}{2}$

گزینه الف صحیح است.

---

۱۴) اگر $e^{yx}-x=\ln x-\ln y$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $A(1,1)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{-3}{2}$ د) ۱-

گزینه ب صحیح است.

---

۱۵) اگر $y=e^{2t}+e^{3t}, x=te^t$ مقدار $\frac{dy}{dx}(t=0)$ کدام است؟

الف) $\frac{5}{2}$ ب) $\frac{5}{3}$ ج) ۵ د) $\frac{1}{5}$

گزینه ج صحیح است.

---

۱۶) اگر $y=\frac{1}{t}-t, x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ مقدار $\frac{dy}{dt}(t=1)$ کدام است؟

الف) ۱　　ب) ۱-　　ج) ۲　　د) ۲-

گزینه د صحیح است.

۱۷-عبارت $y\sqrt{x}-x\sqrt{x}=5$ حاصل $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

الف) $\frac{y}{2x}$　　ب) $\frac{-y}{2x}$　　ج) $\frac{3}{2}-\frac{y}{2x}$　　د) $\frac{3}{2}+\frac{y}{2x}$

گزینه ج صحیح است.

۱۸-در تابع به معادله $y=\frac{x^2+1}{x}$ اگر y',y'' مشتقات اول و دوم باشند حاصل $xy''+2y'$ کدام است؟

الف) $\frac{2}{3}$　　ب) $\frac{-2}{x^2}$　　ج) ۲-　　د) ۲

گزینه د صحیح است.

۱۹-از نقطه $A(\pi,0)$ واقع بر منحنی به معادله $y^3=\sin(x-y)$ مماس بر آن رسم کرده ایم، معادله خط مماس کدام است؟

الف) $y+x=-\pi$　　ب) $y-x=-\pi$　　ج) $y+x=2\pi$　　د) $y-x=-2\pi$

گزینه ب صحیح است.

۲۰- اگر $f(x)=e^x-\ln x$ باشد و $h(x)=f^{-1}(x)$ مقدار $h'(e)$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{e}$　　ب) e　　ج) $e-1$　　د) $\frac{1}{e-1}$

گزینه د صحیح است.

۲۱-از نقطه $A(1,e)$ خط مماس بر منحنی $y=e^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

الف) $y=ex$　　ب) $y=-2ex+3e$　　ج) $y=-ex+2e$　　د) $y=\frac{-e}{2}x+\frac{3}{2}$

گزینه ج صحیح است.

۲۲-اگر $4x^2-y^2+16x+2y+11=0$ باشد معادله خط مماس بر منحنی موازی محور y کدام است؟

الف) $\begin{matrix} x=-1 \\ x=-3 \end{matrix}$ ب) $\begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix}$ ج) $\begin{matrix} x=-1 \\ x=3 \end{matrix}$ د) $\begin{matrix} x=1 \\ x=-3 \end{matrix}$

گزینه الف صحیح است.

۲۳-معادله خط مماس بر منحنی $2xy^3+3x^2y-4x=1$ در نقطه $x=1$ واقع بر کدام منحنی است؟

الف) $9y+4x=13$ ب) $9y-4x=13$ ج) $9y-4y=13$ د) $9x+4y=13$

گزینه الف صحیح است.

۲۴-معادله خط مماس بر منحنی $x=\frac{t-1}{t+1}, y=\frac{t+1}{t-1}$ در نقطه $t=2$ کدام است؟

الف) $y=-9x+6$ ب) $\frac{1}{3}x-y=9$ ج) $y=-9x+3$ د) $9y=3x-6$

گزینه الف صحیح است.

۲۵-اگر $g(x)=[x]\sin x$ مقدار $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

الف) ∞ ب) ۰ ج) ۱ د) وجود ندارد

گزینه ب صحیح است؟

از راه تعریف مشتق (یعنی حد) حل می شود. به طور کلی از تابعهای که جز صحیح وجود دارد باید از این روش حل شود.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[x]\sin x-\left[\frac{\pi}{2}\right]\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[x]\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$\xrightarrow{\left[\frac{\pi}{2}\right]=1}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1}=\frac{0}{1}=0$$

۲۶- اگر $f:R\to R$ یک تابع و $f'(a)$ موجود باشد حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ کدام است؟

الف) ۰ ب) $f'(a)$ ج) $2f'(a)$ د) $3f'(a)$

گزینه د صحیح است.

۲۷- اگر $f(x)=\sin \pi x^2$ آنگاه $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

الف) π ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $-\pi$ د) -2π

گزینه د صحیح است.

۲۸- اگر $f'(2)=\frac{-1}{2}, g(x)=x^2-4x+5, h(x)=fog(x)$ باشد مقدار $h'(3)$ کدام است؟

الف) ۲- ب) ۱- ج) ۱ د) ۲

گزینه ب صحیح است.

۲۹-ضریب زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y^2=\ln x+\ln y$ در نقطه $A(e,1)$ کدام است؟

الف) $-e$ ب) e ج) $\frac{1}{e}$ د) $\frac{-1}{e}$

گزینه ج صحیح است.

۳۰-خط مماس بر منحنی $y=\frac{x-2}{x-3}$ در نقطه ای به طول ۴ بر کدامیک از خطوط زیر عمود است؟

الف) $y=\frac{1}{3}x+2$ ب) $y=-x+1$ ج) $y=x+2$ د) $y=-\frac{1}{2}x+3$

گزینه ج صحیح است.

۳۱- اگر min نسبی تابع با ضابطه $y=(a-1)x^2+x$ برابر ۲- باشد a چقدر است؟

الف) $\frac{5}{4}$ ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{3}{8}$ د) $\frac{9}{8}$

گزینه الف صحیح است.

۳۲-اگر $g(x)=\sqrt{9-x^2}, h(x)=fog(x)$ تابع f در $x=3$ مشتق پذیر باشد $h'(0)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۰ ج) ۹ د) ۳

گزینه ب صحیح است.

۳۳-اگر $x=\sin(x+y)$ باشد $\frac{dy}{dx}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{\sin(x+y)}$ ب) $1+\frac{1}{\cos(x+y)}$ ج) $\frac{1}{\cos(x+y)}-1$ د) هیچکدام

گزینه ج صحیح است.

۳۴-اگر $f'(-2)=2$ حاصل $\lim_{t\to -2}\frac{f(t)-f(-2)}{2(t+2)}$ کدام است؟

الف) ۲- ب) ۱- ج) ۱ د) ۲

گزینه ج صحیح است.

۳۵-معادله خط مماس بر نمودار $\frac{\pi}{2}+y=Arc\sin x+Arc\cos y$ در نقطه $A(0,0)$ کدام است؟

الف) $x-2y=0$ ب) $x-3y=0$ ج) $x+2y=0$ د) $x+3y=0$

گزینه الف صحیح است.

۳۶-معادله خط قائم بر منحنی $y=e^{Arc\tan 2x}$ در نقطه $x=0$ برابر است با

الف) $y+2x=2$ ب) $2y+x=2$ ج) $2y-x=2$ د) $y-2x=2$

گزینه ب صحیح است.

۳۷-نمودار تابع $y=3x^4-24x^2+6$ از نظر کدام وضعیت را دارد؟

الف) دو max و یک min　　ب) دو min و یک max

ج) یک max و min ندارد　　د) یک max و یک min دارد

گزینه ب صحیح است.

۳۸-معادله خط مماس بر منحنی $y=x^3-3x^2+3x-2$ در نقطه عطف نمودار کدام است؟

الف) $y=x-2$　　ب) $y=1$　　ج) $y=-1$　　د) $y=-x$

گزینه ب صحیح است.

۳۹-تعداد نقاط عطف $y=x^4-4x^3+18x^2$ کدام است؟

الف) 4　　ب) ۳　　ج) ۰　　د) ۱

گزینه ج صحیح است.

۴۰-نمودار تابع $y=(2x-3)\sqrt[3]{x^2}$ در مبدا بر کدام منحنی مماس است؟

الف) محور x ها　　ب) محور y ها

ج) نیمساز ناحیه اول و سوم　　د) نیمساز ناحیه دوم و چهارم

۴۱- اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^2 & x\geq 2 \\ 8x+b & x<2 \end{cases}$ در $x=2$ مشتق پذیر باشد آنگاه مقدار a+b کدام است؟

الف) ۶-　　ب) ۶　　ج) ۲　　د) ۸-

گزینه الف صحیح است.

۴۲-برای تابع $f(x)=x+x^{\frac{2}{3}}$ کدامیک از عبارات زیر درست است؟

الف) جهت تقعر منحنی همواره به طرف پایین است

ب) جهت تقعر منحنی همواره به طرف بالا است.

ج) $(0,0)$نقطه عطف منحنی است. د) هیچکدام.

گزینه الف صحیح است.

۴۳-شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در هر نقطه مانند $A(x,y)$به صورت $y'=(x+3)^2(x-1)^3(x-4)$ است.

طول نقطه $\max$ نسبی این تابع کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۳-

گزینه الف صحیح است.

۴۴-مقدار $\sin^{-1}(\cos x)$ کدام گزینه است؟

الف) $\sqrt{1-x^2}$ ب) $\frac{\pi}{2}-x$ ج) $\sqrt{1+x^2}$ د) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

گزینه ب صحیح است.

۴۵-مشتق مرتبه ۶۰ تابع $y=\sin x$کدام است؟

الف) $y^{(60)}=\sin x$ ب) $y^{(60)}=\cos x$ ج) $y^{(60)}=-\sin x$ د) $y^{(60)}=-\cos x$

گزینه الف صحیح است.

۴۶-یک بادکنک کروی در سطح دریا قطرش ۴ متر است. بعد از رسیدن به یک ارتفاع معین قطر آن ۴ متر و ۲۰ سانتی متر می شود. تغییر حجم بادکنک چقدر است؟

الف) $\frac{3}{4}\pi$ ب) $\frac{4}{3}\pi(10/088)$ ج) $\frac{4}{3}(10/088)$ د) $4\pi(10/088)$

گزینه ب صحیح است

حل:

$$\Delta v=f(r+\Delta r)-f(r)=\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Delta v=\frac{4}{3}(4+0/2)^3-\frac{4}{3}\pi(4)^3=\frac{4}{3}\pi(10/088)$$

۴۷-معادله $x^8+5x=4$حداکثر چند ریشه دارد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د)فاقد ریشه

گزینه الف صحیح است.

۴۸- اگر $u=(\tan x-1)^5$ و $y=\sqrt{u^2+u}$ باشد مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

الف) ۱-　　ب) ۰　　ج) ۲　　د) ۵

گزینه ب صحیح است.

۴۹- اگر بین y,x رابطه $2x+y=16$ برقرار باشد. y,x چقدر باشد تا حاصلضرب آن ماکزیمم شود؟

الف) $y=8, x=4$　　ب) $y=8, x=8$　　ج) $y=8, x=-4$　　د) $y=8, x=-8$

گزینه الف صحیح است.

۵۰-نمودار تابع $y=(x-1)^3(x+1)$ در کدام فاصله نزولی است؟

الف) $x<1$　　ب) $x<-\frac{1}{2}$　　ج) $x>1$　　د) $x>\frac{-1}{2}$

گزینه ب صحیح است.

فصل هفتم

انتگرال فرمول ها، قوانین و روش های انتگرال گیری

فرمول ها و روش های انتگرال گیری

انتگرال گیری در واقع به معنای پیدا کردن تابع اصلی از روی مشتق تابع است، انتگرال یک تابع مانند $f(x)$ را با نماد $\int f(x)d(x)$ نمایش می دهند. به عنوان مثال در $\int \sin x dx$ باید تابع اصلی را که مشتق ان $\sin x$ است پیدا کنیم. جواب های رو به رو را برای $\int \sin x dx$ می توان پیدا کرد.

$$\int \sin x dx = \begin{bmatrix} \cos x \\ \cos x \pm 1 \\ \cos x \pm 1 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

بنابراین انتظار می رود جواب انتگرال به صورت دسته ای از جواب ها باشد.

پس می توان نوشت

$$\int \sin x dx = \cos x + c$$

توجه: جواب انتگرال را تابع اصلی یا تابع اولیه نیز می نامند.

در حالت کلی

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

توجه: پیدا کردن تابع اصلی از روی مشتق همیشه کار آسانی نیست، لذا برای راحتی از فرمول های انتگرال برای پیدا کردن تابع اولیه استفاده می کنیم.

فرمول های انتگرال گیری

$$1)\int k dx = kx + c$$

مثال

$$\int 5dx = 5x + c$$

$$\int -\frac{1}{2}dx = -\frac{1}{2}x + c$$

$$\int 1dx = x + c$$

$$2)\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال

$$\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c = \frac{x^7}{7} + c$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int x^{-4} dx = \frac{x^{-4}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{3x^3} + c$$

توجه۱: اگر x^n زیر رادیکال با فرجه m باشد می توان از قانون $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ رادیکال را حذف می کنیم سپس از فرمول ۲ استفاده کرده

مثال:

$$\int \sqrt[5]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

توجه۲: اگر در مخرج کسر باشد می توان آن را در صورت آورده و علامت آن را تغییر داده سپس از فرمول ۲ استفاده کرده.

مثال:

$$\int \frac{dx}{x^{10}} = \int x^{-10} dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = \frac{x^{-9}}{-9} + c = \frac{-1}{9x^{9}} + c$$

قوانین انتگرال گیری

۱-قانون جمع و منها در انتگرال ها: اگر بین توابع جلوی انتگرال جمع یا منها باشد می توان انتگرال ها را جدا کرد.

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) = \int f(x) \pm \int g(x)$$

مثال:

$$\int \left(x + \sqrt{x} - \frac{5}{x^{3}} + 2 \right) dx = \int x dx + \int \sqrt{x}\, dx - \int \frac{5}{x^{3}} dx + \int 2dx$$

$$= \frac{x^{2}}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5\frac{x^{-2}}{-2} + 2x + c = \frac{x^{2}}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^{3}} + \frac{5}{2x^{2}} + 2x + c$$

۲-قانون ضرب و تقسیم در انتگرال ها: در حالتی که توابعی جلوی انتگرال در هم ضرب یا تقسیم شده باشد قانون خاصی ندارد به عبارت دیگر نمی توان انتگرال ها را جدا کرد. برای حل این نوع انتگرال ها روش های مختلفی وجود دارد که در زیر به آن ها اشاره می کنیم.

$$\int (f \times g) dx = \int f dx \times \int g dx \leftarrow \text{غلط}$$

$$\int \frac{f}{g} dx = \int \frac{f dx}{g dx} \leftarrow \text{غلط}$$

۱-روش حل انتگرال با استفاده از ساده کردن تابع جلوی انتگرال:

در این روش می توان از ضرب چند جمله ای ها و یا استفاده از اتحادها تابع جلوی انتگرال را ساده کرده و سپس با استفاده از فرمول های انتگرال جواب را محاسبه کرده.

تست: حاصل انتگرال $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$ کدام است؟ (در مخرج x یا توانی از x داشته باشیم)

الف) $2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5}{3}x-1\right)+c$ ب) $2\sqrt{x}\left(5x^2+\frac{3}{5}x-1\right)+c$

ج) $2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5}{3}x+1\right)+c$ د) $5\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)+c$

حل:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int\left(x^2+5x-1\right)x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int\left(x^2x^{-\frac{1}{2}}+5xx^{-\frac{1}{2}}-1x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+5\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{10}{3}\sqrt{x^3}-2x^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{10}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+c=2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5}{3}x-1\right)+c$$

گزینه الف صحیح است.

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x}}dx$ را بدست آورید؟

حل: برای ساده کردن صورت از اتحادهای $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$ استفاده کنید.

$$\int \frac{x^2+1-2x}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1-2x\right)x^{\frac{-1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \left(x^2 x^{\frac{-1}{2}}\right)dx + \int 1x^{\frac{-1}{2}}dx - 2\int xx^{\frac{-1}{2}}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int x^{\frac{3}{2}}dx + \int x^{\frac{-1}{2}}dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$= \frac{1}{5}x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x} + c =$$

$$\sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^2 + 1 - \frac{1}{3}x\right) + c$$

۲-روش حل انتگرال با استفاده از تغییر متغیر u:

در این روش ابتدا یکی از توابع جلوی انتگرال را u بگیرید. بعد دیفرانسیل u (du) را حساب کنید، اگر du در جلوی انتگرال ظاهر شده باشد u و du را به جای توابع در جلوی انتگرال قرار داده سپس از فرمول ها جواب ها را بدست می آوریم.

الف) انتخاب تغییر متغیر u وقتی ضرب چند جمله ای ها را داریم: در این روش ابتدا عبارت داخل پرانتز(که دارای توان می باشد) یا عبارت زیر رادیکال را uگرفته، اگر مشتق آنها وجود داشته باشد و در خود عبارت ضرب شده باشد می توان از فرمول $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ استفاده کنیم.

مثال ۱) حاصل انتگرال $\int 2x\left(x^2-5\right)^{10} dx$ را بدست آورید؟

$$x-5=u \rightarrow 2xdx=du$$

$$\int\left(\underbrace{x2-5}_{u}\right)^{10}\underbrace{2xdx}_{du}=\int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+c\xrightarrow{u=x2-5}\frac{\left(x^2-5\right)^{11}}{11}+c$$

نکته: بعضی مواقع وقتی مشتق u را حساب می کنیم و با du مقایسه می کنیم ممکن است عدد یا علامتی لازم باشد که در du ضرب شود، در این حالت اگر عددی ضرب کردیم باید بیرون از انتگرال در معکوس عدد هم ضرب شود و اگر علامت ضرب کردیم همین علامت را در بیرون انتگرال ضرب کنیم.

مثال ۲) حاصل $\int x^2\left(3x^3-3\right)^5 dx$ را بدست آورید؟

$$u=3x^3-3 \rightarrow du=9x^2dx$$

$$\int\left(3x^3-3\right)^5 x^2dx=\frac{1}{9}\int\left(3x^3-3\right)^5 9x^2dx$$

$$=\frac{1}{9}\int u^5du=\frac{1}{9}-\frac{u^6}{6}+c=\frac{\left(3x^3-3\right)^6}{54}+c$$

مثال۳) حاصل $\int x\sqrt[3]{x^2-3}$ را بدست آورید؟

uعبارت زیر رادیکال

$$x^2-3=u \rightarrow 2xdx=du$$

$$\int \sqrt[3]{x^2-3}=\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{x^2-3}.2xdx=$$

$$\frac{1}{2}\int \Big(\underbrace{x^2-3}_{u}\Big)^{\frac{1}{3}}.\underbrace{2xdx}_{du}=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-3\right)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c=$$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^4}+c$$

ب) انتخاب تغییر متغیر u برای تقسیم چند جمله ای ها:
چند جمله ای که درون پرانتز قرار گرفته و تواندار باشد یا عبارتی که زیر رادیکال می باشد در مخرج کسری قرار بگیرند، عبارت درون پرانتز و یا عبارت زیر رادیکال را u گرفته، اگر مشتق آنها در صورت کسر وجود داشت عبارت را از مخرج به صورت آورده و توان آن نیز قرینه می شود سپس از فرمول $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ استفاده می کنیم.

مثال: حاصل $\int \frac{(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^3}dx$ را بدست آورید؟

$$u = x^2 + 2x + 3 \longrightarrow du = (2x+2)du$$

$$\int \frac{(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^3} dx = \int (x+1)\left(x^2+2x+2\right)^{-3} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{2(x+1)}_{du}\underbrace{\left(x^2+2x+2\right)^{-3}}_{u} dx = \frac{1}{2}\int u^{-3} du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2x+2\right)^{-2}}{-2} + c$$

مثال: حاصل $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2x^3-3}}$ را محاسبه کنید.

$$u = 2x^3 - 3 \rightarrow du = 6x^2dx$$

$$\int \frac{x^2dx}{\left(2x^3-3\right)^{\frac{1}{2}}} = \int x^2\left(2x^3-3\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$\frac{1}{6}\int \underbrace{6x^2}_{du}\underbrace{\left(2x^3-3\right)^{-\frac{1}{2}}}_{u} dx = \frac{1}{6}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(2x^3-3\right)^{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{2x^3-3} + c$$

تذکر: بعضی مواقع ممکن است بعد از انتخاب u و محاسبه مشتق آن، x یا توانی از x جلوی انتگرال اضافه باشد، در این حالت بهتر است کل رادیکال را u بگیرید. روش حل انتگرال را در مثال زیر آمده .

تست۱: حاصل انتگرال $\int \frac{x}{\sqrt{x+5}}dx$ کدام است؟

الف) $\frac{20}{3}x\sqrt{x+5}+c$ ب) $\frac{2}{3}x\sqrt{x+5}+c$

ج) $\frac{2x+20}{3}x\sqrt{x+5}+c$　　　　د) $\frac{2x-20}{3}x\sqrt{x+5}+c$

حل: اگر $u=x+5 \Leftarrow du=dx$ که x در صورت کسر اضافه می باشد پس

$$\sqrt{x+5}=u$$

$$\sqrt{x+5}=u \Rightarrow x+5=u^2 \Rightarrow \begin{cases} dx=2udu \\ x=u^2-5 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+5}}dx=\int \frac{u^2-5}{u}.2udu \Rightarrow$$

$$2\int \left(u^2-5\right)du=2\left(\frac{u^3}{3}-5u\right)+c=2\left(\frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^3}{3}-5\sqrt{x+5}\right)+c$$

گزینه د صحیح است.

تست۲: حاصل $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{3}\left(x^2-2\right)\sqrt{x^2+1}+c$　　　　ب) $\frac{1}{2}\left(2-x^2\right)\sqrt{x^2+1}+c$

ج) $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+c$　　　　د) $\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+1}+c$

حل: گزینه الف صحیح است

$$u=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow u^2=x^2+1\Rightarrow 2udu=2xdx\Rightarrow udu=xdx$$
$$\Rightarrow u^2-1=x^2$$
$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{x^2.x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{x^2.xdx}{\sqrt{x^2+1}}=$$
$$\int\frac{(u^2-1).udu}{u}=\int(u^2-1)du=\frac{u^3}{3}-u+c$$
$$\to\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3}-\sqrt{x^2+1}+c=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3-3\sqrt{x^2+1}}{3}+c$$
$$=\sqrt{x^2+1}\left(\frac{x^2-2}{3}\right)+c$$

ج)تغییر متغیر u در توابع مثلثاتی: عبارت جلوی توابع مثلثاتی را u گرفته، اگر مشتق آن وجود داشت از فرمول های زیر استفاده می کنیم (u تابع و duمشتق توابع)

$$1)\int\sin u.du=-\cos u+c$$
$$2)\int\cos u.du=\sin u+c$$
$$3)\int\left(1+\tan^2 u\right).du=\int\frac{1}{\cos^2 u}du=\int\sec^2 u.du=\tan u+c$$
$$4)\int 1+\cot^2 u.du=\int\frac{1}{\sin^2 u}.du=\int\csc^2 u.du=-\cot u+c$$
$$5)\int\sec u.\tan u.du=\sec u+c$$
$$\int\csc u.\cot udu=-\csc u+c$$

مثال: حاصل $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ را بدست آورید؟

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2\int\sin u.du=-2\cos u+c=-2\cos\sqrt{x}+c$$

تمرین: حاصل $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{3x}}dx$ را بدست آورید؟

نکته: اگر تعداد عبارت های مثلثاتی $\sin$ یا $\cos$ جلوی انتگرال از یکی بیشتر باشد و $\sin$ و $\cos$ به صورت ضرب کنار هم قرار بگیرند، از بین $\sin$ و $\cos$ آن که توان دارد را u و دیگری را du گرفته و از فرمول $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ استفاده می کنیم.

مثال: حاصل $\int \sin^5 x \cos x dx$ را بدست آورید؟

$$u = \sin x \to du = \cos x dx$$

$$\int \sin^5 x . \cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

نکته: قبلاً گفته شده که اگر یک عبارت در داخل پرانتز و توان‌دار در مخرج کسر وجود داشته باشد که مشتق عبارت داخل پرانتز در صورت کسر وجود داشته باشد باید عبارت از به صورت کسر آورده و از فرمول $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ استفاده کنیم ولی اگر همین عبارتی که در مخرج کسر هست و مشتق ان در صورت وجود دارد توان نداشته باشد نمی توان از این فرمول استفاده کنیم و باید از فرمول زیر استفاده شود.

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

مثال: حاصل $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1} dx$ را بدست آورید؟

$$u = x^3 + 3x + 1 \to du = 3x^2 + 3 = 3\left(x^2+1\right)$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\left(x^2+1\right)}{x^3+3x+1}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + c = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x+1\right| + c$$

مثال: حاصل $\int \frac{\sin x}{5-\cos x}dx$ را بدست آورید؟

$$u = 5-\cos x \to du = \sin x dx$$
$$\int \frac{\sin x}{5-\cos x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|5-\cos x| + c$$

د) تغییر متغیر u برای توابع نمایی $\left(a^u, e^u\right)$

در این حالت توان تابع نمایی را u گرفته، اگر مشتق این توان در کنار تابع نمایی وجود داشته باشد از فرمول های زیر استفاده می کنیم.

$1)\int e^u du = e^u + c$

$2)\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

مثال: حاصل انتگرال $\int (2+x)e^{2x+\frac{x^2}{2}}dx$ را بدست آورید؟

$$u = 2x + \frac{x^2}{2} \to du = (2+x)dx$$
$$\int (2+x)e^{2x+\frac{x^2}{2}}dx = \int e^u du = e^u + c = e^{2x+\frac{x^2}{2}} + c$$

نکته: در حالتی که تعداد عبارتهای نمایی جلوی انتگرال از یکی بیشتر باشد، عبارت نمایی که دارای توان می باشد را u گرفته و اگر مشتق آن در کنارش باشد از فرمول $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ استفاده می کنیم.

مثال: حاصل $\int \frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}dx$ را بدست اورید؟

$$u=1+e^{2x} \to du=2e^{2x}dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}dx=\int e^{2x}.\left(1+e^{2x}\right)^{-3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \underbrace{2e^{2x}}_{du}\Big(\underbrace{1+e^{2x}}_{u}\Big)^{-3}dx=\frac{1}{2}\int u^{-3}du=\frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2}+c=\frac{-1}{4}\left(1+e^{2x}\right)^{-2}+c$$

مثال: حاصل $\int \frac{\cos x}{e^{2+\sin x}}dx$ را بدست آورید؟

$$u=-\left(2+\sin x\right) \to du=-\cos x dx$$

$$\int \frac{\cos x}{e^{2+\sin x}}=\int \cos x.e^{-(2+\sin x)}dx=-\int -\cos x.e^{-(2+\sin x)}dx=-\int e^{u}du=-e^{u}+c$$

$$=-e^{-(2+\sin x)}+c$$

مثال: حاصل $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx$ را بدست آورید؟

$$u=x^2 \to du=2xdx$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\cos^2 x^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos^2 u}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 u}du=\frac{1}{2}\tan u+c=\frac{1}{2}\tan x^2+c$$

مثال: حاصل $\int \sin 2x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$ را بدست آورید؟

می دانیم . $\sin 2x=2\sin x.\cos x$

$$u = 1+\sin^2 x \rightarrow du = 2\sin x.\cos x dx$$

$$\int \sin 2x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx = \int \underbrace{2\sin x.\cos x}_{du}\underbrace{\left(1+\sin^2 x\right)}_{u}^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

انتگرال هایی که جواب آن هاتوابع معکوس مثلثاتی می شود:

$$1)\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}Arc\tan\frac{u}{a}+c$$

توجه مهم: از فرمول بالا زمانی استفاده می شود که مشتق u(بدون در نظر گرفتن توان ۲ آن) در صورت کسر باشد . (uو aرا پیدا کرده و در فرمول قرار می دهیم)

مثال ۱:

$$\int \frac{dx}{25+x^2} \quad \begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ a = 5 \end{cases}$$

جواب انتگرال

$$\Rightarrow \frac{1}{5}Arc\tan\frac{x}{5}+c$$

مثال ۲:

$$\int \frac{2xdx}{9+x^4} \quad \begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2xdx \\ a = 3 \end{cases}$$

جواب انتگرال

$$\Rightarrow \frac{1}{3}Arc\tan\frac{x^2}{3}+c$$

توجه مهم: بعضی مواقع ممکن است درdu (یعنی مشتق گرفتن ازu) dx ضریبی داشته باشد که در صورت کسر

نباشد در این حالت باید جواب انتگرال را بر معکوس آن عدد ضرب کنیم مانند مثال زیر:

مثال ۳:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \quad \begin{cases} u=3x \Rightarrow du=3dx \\ a=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1} Arc\tan\frac{3x}{1}+c = \frac{1}{3} Arc\tan 3x + c$$

چون در صورت کسر ۳ وجود ندارد خودمان اضافه می کنیم و جواب انتگرال را در ضرب می کنیم.

$$2)\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = Arc\sin\frac{u}{a}+c$$

duمشتق تابع u (بدون در نظر گرفتن توان ۲) آن است.

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}} \qquad \begin{cases} u=2x \to du=2dx \\ a=5 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2dx}{5^2-(2x)^2} = \frac{1}{2}Arc\sin\frac{2x}{5}+c$$

$$3)\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}Arc\sec\left|\frac{u}{a}\right|+c$$

duمشتق تابع u (بدون در نظر گرفتن توان ۲) می باشد

مثال: باید به جای $\tan x$, $\frac{\sin x}{\cos x}$ را قرار داد که به صورت فرمول3شود

$$\int \frac{\tan x dx}{\sqrt{\cos x^2 - 4}} \qquad \begin{cases} u = \cos x \to du = -\sin x dx \\ a = 2 \end{cases}$$

$$= \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{\cos^2 x - 4}} = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x \sqrt{\cos^2 x - 2^2}} = -\frac{1}{2} Arc\sec\left|\frac{\cos x}{2}\right| + c$$

حالتهای خاص برای انتگرال هایی که جواب ان ها معکوس مثلثاتی می شود.

۱-در مخرج کسر یا زیر رادیکال چند جمله ای درجه ۲ به فرم ax^2+bx+c داشته باشیم برای حل انتگرال از اتحاد زیر (اتحاد مربع کامل) استفاده کرده و با ساده کردن، عبارت های a^2+u^2 یا a^2-u^2 یا u^2-a^2 را بوجود می آوریم و بعد از فرمول انتگرال محاسبه می کنیم.

$$x^2 \pm ax + b = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$$

مثال:

$$x^2 - 4x + 3 = \left(x - \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

تذکر: اگر x^2 ضریب داشته باشد قبل از استفاده از اتحاد مربع کامل باید از ضریب x^2فاکتور بگیرید.

مثال:

$$2x^2 - 4x + 5 = 2(x^2 - 2x + \frac{5}{2}) = 2\left((x-1)^2 - 1 + \frac{5}{2}\right) = 2\left((x-1)^2 + \frac{3}{2}\right) = 2(x-1)^2 + 3$$

تست۱: حاصل $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{2}Arc\tan(x-2)+c$ ب) $Arc\tan x+c$

ج) $Arc\tan(x-2)+c$ د) $\frac{-1}{2}Arc\tan(x-2)+c$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$x^2-4x+5=(x-2)^2-4+5=(x-2)^2+1 \Rightarrow \begin{cases} u=x-2 \Rightarrow du=dx \\ a=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2-4x+5}=\int \frac{dx}{(x-2)^2+1}=\frac{1}{a}Arc\tan\frac{u}{a}+c=\frac{1}{1}Arc\tan(x-2)+c$$

تست۲- حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ کدام گزینه است؟

الف) $\sin^{-1}(x-2)+c$ ب) $\sin^{-1}(2x-2)+c$

ج) $\sin^{-1}(x-\frac{1}{2})+c$ د) $\sin^{-1}(2x-1)+c$

حل: گزینه د صحیح است.

$$x-x^2=-(x^2-x)=-\left((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$$

$$\begin{cases} u=x-\frac{1}{2} \Rightarrow du=dx \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}=Arc\sin\frac{u}{a}+c=$$

$$Arc\sin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+c=Arc\sin(2x-1)+c$$

۲-اگر در مخرج کسر عبارت مثلثاتی یا نمایی داشته باشیم:

مثال: حاصل $\int\frac{(\sin 2x)dx}{4+\cos^2 2x}$ را بدست آورید؟

حل: در صورت کسر ۲- کم داریم آن را اضافه و بیرون انتگرال در $-\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم.

$$\cos 2x = u \longrightarrow -2\sin 2x dx = du$$
$$a = 2$$
$$\int \frac{\sin 2x dx}{4+\cos^2 2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x dx}{4+\cos^2 2x} =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{a} Arc\tan \frac{u}{a} + c$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} Arc\tan\left(\frac{\cos 2x}{2}\right) + c =$$
$$\frac{-1}{4}\arctan\left(\frac{\cos 2x}{2}\right) + c$$

مثال: حاصل $\int \frac{e^x dx}{9+e^{2x}}$ را بدست آورید؟

$$u = e^x \rightarrow du = e^x dx$$
$$a = 3$$
$$\Rightarrow \int \frac{e^x dx}{9+e^{2x}} = \int \frac{e^x dx}{(3)^2 + (e^x)^2}$$
$$= \frac{1}{a} Arc\tan\left(\frac{u}{a}\right) + c = \frac{1}{3} Arc\tan\left(\frac{e^x}{3}\right) + c$$

نکته: برای محاسبه انتگرال هایی که به فرم $\int \sin ax . \cos bx dx$ یا $\int \sin ax . \sin bx\, dx$ یا $\int \cos ax . \cos bx dx$ می باشند باید با توجه به فرمول های زیر تابع زیر انتگرال را از حالت ضرب به جمع یا تفریق تبدیل کرد.

$$1)\sin ax.\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x\right]$$

$$2)\sin ax.\sin bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right]$$

$$3)\cos ax.\cos bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x\right]$$

مثال: حاصل انتگرال $\int \sin 5x.\cos 3x dx$ را بدست آورید؟

$$\sin 5x.\cos 3x=\frac{1}{2}[\sin(5-3)x+\sin(5+3)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin 2x+\sin 8x]$$

$$\Rightarrow \int \sin 5x.\cos 3xdx=\int \frac{1}{2}[\sin 2x+\sin 8x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int \sin 2xdx+\int \sin 8xdx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 8x\right)+c=$$

$$\frac{-1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+c$$

فصل هشتم :

انتگرال معین و کاربردهای آن در محاسبه مساحت، حجم و طول قوس و مشتق انتگرال

انتگرال معین:

در انتگرال $\int f(x)dx$ اگر تغییرات x در فاصله a تا b اعمال شود، انتگرال را انتگرال معین می نامند و با نماد $\int_a^b f(x)dx$ نشان می دهند جواب انتگرال معین همیشه یک عدد ثابت است.

توجه : $\int f(x)dx$ را اصطلاحاً انتگرال نامعین می نامند.

محاسبه انتگرال معین:

ابتدا جواب انتگرال را محاسبه کرده سپس اعداد بالا و پایین انتگرال را به ترتیب به جای x در جواب انتگرال قرار داده و از هم کم می کنیم طبق رابطه زیر

توجه: در انتگرال معین عدد ثابت c حذف می شود.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ۱:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

مثال ۲:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}\cos 2x \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

مثال ۳:

$$\int_{-2}^{2} (x - x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) + \left(2 - (-2)\right)$$

$$= \left(2 - 2\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) + 4 = \frac{-16}{3} + 4 = \frac{-4}{3}$$

تست۱: حاصل $\int_1^4 \frac{x - \sqrt{x}}{3x}dx$ برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\frac{7}{3}$ ب) $\frac{-7}{3}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{-1}{3}$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$= \int_1^4 \frac{x}{3x}dx - \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{3x}dx = \int_1^4 \frac{1}{3}dx - \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx$$

$$= \frac{1}{3}x \Bigg|_1^4 - \frac{1}{3}\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}x \Bigg|_1^4 - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

توجه: در حالتی که انتگرال با انتخاب تغییر متغیر u حل می شود، در انتگرال معین اعداد b,a باید به جای x قرار گیرند نه u . یعنی بعد از حل انتگرال حتماً باید

u بر حسب x نوشته شود سپس اعداد b,a به جای x قرار دهیم.

تست۱: حاصل $\int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-1}$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{32}{3}$ ب) ۶ ج) ۶- د) $\frac{-32}{3}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$x^2-1=u \rightarrow 2xdx=du$$

$$=\int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-1}dx=\int_1^3 x(x^2-1)^{\frac{1}{3}}dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_1^3 2x(x^2-1)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{2}\int_1^3 u^{\frac{1}{3}}du$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^3=\left((8)^{\frac{4}{3}}-(1-1)^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{48}{8}=6$$

تست۲: حاصل انتگرال $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ کدام است؟

الف) $2\left(\frac{1-e}{e}\right)$ ب) $2\left(\frac{e-1}{e}\right)$ ج) $\frac{e-1}{e}$ د) $\frac{1-e}{e}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$u=-\sqrt{x}\Rightarrow du=-\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\int_0^1\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\int_0^1-\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx=$$

$$-2\int_0^1 e^u du=-2e^u\Big|_0^1=-2e^{-\sqrt{x}}\Big|_0^1$$

$$=-2(e^{-1}-e^0)=-2\left(\frac{1-e}{e}\right)=2\left(\frac{e-1}{e}\right)$$

تست۳: حاصل $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}dx$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{3\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) π

حل: یکی از مواردی که در روش حل انتگرال به ما کمک می کند گزینه ها هستند در این تست گزینه ها ضریب های از π هستند بنابراین انتگرال مربوط به معکوس توابع مثلثاتی است.

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=Arc\sin\frac{u}{a}$$

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\begin{cases}a=2\\u=x\rightarrow du=dx\end{cases}$$

$$\Rightarrow Arc\sin\frac{x}{2}\Big|_0^2=Arc\sin\frac{2}{2}-Arc\sin 0=\frac{\pi}{2}$$

نکته: در انتگرال ها معمولاً اگر عبارت های $1+\tan^2x$ یا $1+\cot^2x$ دیده شود بهتر است از اتحادهای زیر استفاده کرد و تابع جلوی انتگرال را ساده کنیم.

مثال:

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

مثال:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}dx=$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,dx\xrightarrow{\sin 2x=2\sin x\cos x}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}2\sin x.\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin 2x\,dx=$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}=\frac{-1}{4}\left(\overbrace{\cos 2\pi-\cos\frac{3\pi}{2}}^{1}\right)=\frac{-1}{4}$$

تست: حاصل $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ کدام گزینه است؟

الف) $3\sqrt{2}-1$ ب) $2\sqrt{3}-1$ ج) $2(\sqrt{3}-1)$ د) $3(\sqrt{2}-1)$

حل: هرگاه تابع جلوی انتگرال $\ln x$ باشد و $\frac{1}{x}$ هم در انتگرال داشته باشیم چون $\frac{1}{x}$ مشتق $\ln x$ است پس عبارتی $\ln x$ که دارد را u می گیریم.

$$u = 1 + \ln x \to du = \frac{1}{x}dx$$
$$\Rightarrow \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^2} \frac{dx}{x}(1+\ln x)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \int_1^{e^2} u^{\frac{-1}{2}} du = \frac{u^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = \frac{(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{e^2}$$
$$2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^2} = 2\left(\sqrt{1+\ln e^2} - \sqrt{1+\ln 1}\right)$$
$$= 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

گزینه ج صحیح است.

خواص انتگرال معین و کاربرد آن

۱- اگر $a=b$ (b,a باهم برابر باشند یعنی کران بالا و پایینی انتگرال برابر باشد) جواب انتگرال همیشه صفر است.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

۲-اگر در انتگرال معین جای b,a را عوض کنیم باید انتگرال را در یک منفی ضرب کرد.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)d(x)$$

۳-اگر یک عدد مانند C بین b,a باشد می توان انتگرال به صورت زیر از هم جدا کرد. $(a<c<b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

انتگرال هایی که تابع جلوی انتگرال قدر مطلق داشته باشد:

برای حل انتگرال ابتدا باید قدر مطلق را حذف کنیم.
برای حذف قدر مطلق:

۱-داخل قدر مطلق را مساوی صفر قرار داده و ریشه های آن را بدست می آوریم.
۲-اگر اعداد بدست آمده در فاصله aتا b باشند طبق خاصیت ۳ در بالا باید انتگرال را از هم جدا کرد.
با استفاده از اعداد بالا و پایینی انتگرال باید ببینیم که تابع مثبت یا منفی می شود و قدر مطلق را حذف کنیم .

تست: حاصل $\int_{-1}^{1}|x|dx$ کدام گزینه است؟

الف) ۱ ب) ۱- ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{-1}{2}$

حل: ریشه عبارت داخل قد رمطلق $x=0$ است پس انتگرال را جدا کرده سپس در انتگرال اول چون x بین $-1\langle x\langle 0$ منفی خواهد بود سپس قدر مطلق را حذف کرده و تابع را در منفی ضرب می کنیم و چون $0<x<1$ مثبت است سپس قدر مطلق را حذف و تابع را در مثبت ضرب می کنیم.

$$\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}|x|dx+\int_{1}^{0}|x|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_{1}^{0}x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}$$
$$=-\left(0-\frac{(-1)^2}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+0\right)=1$$

توجه: بعضی مواقع ممکن است ریشه عبارت داخل قدر مطلق بینb,a نباشد در این صورت ریشه عبارت داخل قدرمطلق را کنار می گذاریم، سپس با استفاده از اعداد b,aو این که تابع در فاصله a تا bچه علامتی بگیرد قدر مطلق را حذف و جواب را بدست می آوریم مانند تست زیر:

تست: حاصل $\int_1^2 \sqrt{|x|+x}\,dx$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{2}\left(8-\sqrt{2}\right)$ ب) $\frac{2}{3}\left(4-\sqrt{2}\right)$ ج) $\frac{-1}{3}\left(8-2\sqrt{2}\right)$ د) $\frac{-2}{3}\left(4-\sqrt{2}\right)$

حل: در مثال بالا عدد $x=0$ یعنی ریشه x داخل قدر مطلق در فاصله۱ تا۲ نیست سپس آن را در نظر نمی گیریم x داخل قدر مطلق در فاصله۱ تا۲ مثبت است سپس x از قدر مطلق مثبت بیرون می آید و داریم

$$\int_1^2 \sqrt{|x|+x}\,dx = \int_1^2 \sqrt{x+x}\,dx = \int_1^2 \sqrt{2x}\,dx =$$

$$\int_1^2 (2x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x)^{\frac{1}{2}}2dx = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}(8-\sqrt{8})=\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})$$

حل انتگرال به روش تجزیه کسرها

یکی از روش های حل انتگرال توابع کسری استفاده از روش تجزیه (جدا کردن) کسر جلوی انتگرال است این روش وقتی استفاده می شود که اولاً توان xدر صورت کسر از درجه xدر مخرج کسر کوچکتر باشد ثانیاً حتماً باید مخرج کسر قابل تجزیه شدن باشد منظور از تجزیه کردن این است که از اتحادها و یا فاکتورگیری استفاده کرده و چند جمله ای که در مخرج وجود دارد را به صورت ضرب دو یا چند پرانتز بنویسیم.

اتحادهای مهم:

$1) a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ $\qquad x^2-16=(x-4)(x+4)$

$$2)\ x^2+ax+b=(x+c)(x+d)$$
$$x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$$

d,c اعدادی هستند که حاصلضرب آنها باید برابر b و حاصل جمع آنها برابر a شود.

حالت های مختلف برای حل انتگرال به روش تجزیه کسرها

۱-اگر بعد از تجزیه کردن مخرج کسر توان متغیرهای x و توان پرانتزها ۱ باشد، به تعداد پرانتزها، کسر خواهیم داشت که صورت تمامی کسرها را ضرائب ثابتی مانند C,B,A,... گذاشته و باید این ضرائب را پیدا کرده و در آخر انتگرال هر کسر را جداگانه حل کنیم.

مثال:

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}dx$$

$$\frac{x+2}{x^3-x}=\frac{x+2}{x(x^2-1)}=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

$$=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}$$

$$\Rightarrow x+2=A(x^2-1)+Bx^2+Cx^2-Cx$$

$$=Ax^2-A+Bx^2+Bx+Cx^2-Cx=$$

$$x^2(A+B+C)+x(B-C)-A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=1 \\ -A=2\rightarrow A=-2 \end{cases} \Rightarrow B=\frac{3}{2}, C=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+2}{x^3-x}dx=\int \frac{-2}{x}dx+\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$=-\ln x^2+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\ln|x+1|+1$$

۲-اگر پرانتزی توان داشته باشد ولی متغیر x ها از درجه ۱ باشند به تعداد مجموع توان کسر خواهیم داشت و صورت این کسرها را همان $A, B, C, \ldots$ می گذاریم:

مثال:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x\left(x-1\right)^2}$$

$$\frac{Ax^2+A-2Ax+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2}$$

$$1=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\rightarrow B=-1\\ -2A-B+C=0 \qquad \Rightarrow C=1\\ A=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\frac{1dx}{x}+\int\frac{-1dx}{x-1}+\int\frac{-1dx}{\left(x-1\right)^2}$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{\left(x-1\right)^{-1}}{-1}+c$$

۳-اگر پرانتز توان نداشته باشد ولی متغیرها x از درجه ۱ یا درجه ۲ باشند در صورت کسری که مخرج آن از درجه ۲ می باشد باید چند جمله ای از درجه ۱ نوشت مثلاً به صورت $Ax+B$

مثال:

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}dx$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{A(x^2+1)+(Bx+c)x}{x(x^2+1)} =$$

$$\frac{Ax^2+A+Bx^2+cx}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \rightarrow B=-1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-x+3}{x^2+1}$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-xdx}{x^2+1} + \int \frac{3x}{x^2+1}$$

$$= 3\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 3Arc\tan x + C$$

۴-اگر پرانتزها توان داشته باشند و متغیر x از درجه ۲ باشد به تعداد مجموع توان کسر خواهیم داشت صورت کسرهایی که مخرج آنها از درجه ۲ هستند به صورت $Ax+B$ نوشته می شود

مثال:

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+Cx+D}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ A+C=0 \rightarrow C=0 \\ B+D=3 \rightarrow D=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{2dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \to$$

$$\left(x = \tan\theta \to dx = \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta, \theta = \tan^{-1}x\right)$$

$$\Rightarrow 2\tan^{-1}x + \int \frac{\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\left(1+tg^2\theta\right)^2}$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int \frac{d\theta}{1+\tan^2\theta} = 2\tan^{-1}x + \int \cos^2\theta d\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c$$

$$= 2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\sin\left(2\tan^{-1}x\right)\right) + c$$

$$= \frac{3}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{4}.\frac{2\tan(\tan^{-1}x)}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)} + c$$

$$= \frac{3}{2}\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + c$$

تست: حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x-4}\right|$ ب) $\frac{-1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x-4}\right|$ ج) $-\ln\sqrt[3]{\left|\frac{x-4}{x-1}\right|}$ د) $\ln\sqrt[3]{\left|\frac{x-4}{x-1}\right|}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+4}=\frac{1}{(x-4)(x-1)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-1}$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x-4)}{(x-4)(x-1)}=\frac{Ax-A+Bx-4B}{(x-4)(x-1)}$$

$$=\frac{(A+B)x+(-A-4B)}{(x-4)(x-1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\rightarrow B=\dfrac{-1}{3}\\[2ex] -A-4B=1\rightarrow A=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$$

$$\rightarrow\int\frac{dx}{x^2-5x+4}=\int\frac{\frac{1}{3}}{x-4}dx+\int\frac{-\frac{1}{3}}{x-1}dx=$$

$$\frac{1}{3}\ln|x-4|-\frac{1}{3}\ln|x-1|=-\frac{1}{3}\left(\ln|x-1|-\ln|x-4|\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x-4}\right|$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء

برای حل انتگرال هایی به فرم ($\begin{matrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{matrix}$ × چند جمله ای)

از روش جزء به جزء (جدا کردن) عبارت ها استفاده می کنیم.

روش حل: برای حل انتگرال به فرم بالا مطابق جدول زیر چند جمله ای را یک طرف جدول و توابع $\sin ax$ یا $\cos ax$ یا e^{ax} را در طرف دیگر می نویسیم سپس از چند جمله ای مشتق گرفته تا به صفر برسیم و از توابع $\sin ax$، $\cos ax$ یا e^{ax}

به همان تعداد که مشتق گرفته شده انتگرال می گیریم. (طبق فرمولهای $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax},\int \cos ax dx=\frac{1}{a}\sin ax,\int \sin ax dx=\frac{-1}{a}\cos ax$) ادامه حل را با مثال توضیح می دهیم.

تابع دوم	چند جمله ای
انتگرال به همان تعداد که مشتق گرفته شده	مشتق گرفته تا به صفر برسیم.

تست۱: حاصل $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$ کدام است؟

الف) $\frac{e^2-1}{2}$ ب) $1-e^2$ ج) $\frac{e^2-1}{4}$ د) $\frac{1-e^2}{4}$

حل: برای بدست آوردن جواب انتگرال مطابق روش ها مشخص شده از بالا و سمت چپ جدول تا پایین و سمت راست جدول تابع دو طرف فلاش ها و علامت های بالای فلاش ها را در هم ضرب کرده و کنار هم قرار می دهیم (علامت بالای فلش اول + و بقیه فلاش ها یک در میان _ و + می شوند) گزینه ج صحیح است.

e^{2x}	x^2 □ +
$\frac{1}{2}e^{2x}$	$2x$ □ −
$\frac{1}{4}e^{2x}$	۲□ +
$\frac{1}{8}e^{2x}$	۰

جواب انتگرال:

$$= +x^2\frac{1}{2}e^{2x} - 2x\frac{1}{4}e^{2x} + 2\frac{1}{8}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{4}$$

تست ۲ : حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2x\sin 3x dx$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{9}$ ب) $\frac{-1}{9}$ ج) $\frac{2}{9}$ د) $\frac{-2}{9}$

حل:

$2x$ +	$\sin 3x$
2 − 0	$\frac{-1}{3}\cos 3x$ $\frac{-1}{9}\sin 3x$

$$= 2x \times \frac{-1}{3}\cos 3x - 2\times\frac{-1}{9}\sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

جواب انتگرال

$$= \frac{-2}{3}x\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{9}$$

گزینه ج صحیح است.

انتگرال از $\cos x, \sin x$ وقتی توان ۲ دارند

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2a}\sin 2ax\right) + c$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2a}\sin 2ax\right) + c$$

ضمیمه ۱:

$$\int Arc\sin ax\,dx = x\,Arc\sin ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + c$$

$$\int Arc\tan ax\,dx = x\,Arc\tan ax - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2) + c$$

تست: حاصل $\int_0^1 Arc\sin x\,dx$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{2}-1$ ب) $\frac{\pi}{2}+1$ ج) $\frac{\pi}{3}-1$ د) $\frac{\pi}{3}+1$

$$a=1 \Rightarrow \int_0^1 Arc\sin x\,dx = x\,Arc\sin x\,\Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}-1$$

حل: گزینه الف صحیح است.

ضمیمه ۲:

$$\int \ln ax\,dx = \int(\ln a + \ln x)dx = \int \ln a\,dx + \int \ln x\,dx = x(\ln a) + \int \ln x\,dx$$

و برای محاسبه $\int \ln x\,dx$ داریم

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$$

$$\Rightarrow \int \ln ax\,dx = x(\ln a) + x\ln x - x + c$$

تست: حاصل $\int_1^e \ln 3x\,dx$ کدام است؟

الف) $1-(e-1)\ln 3$ ب) $1+(e-1)\ln 3$

ج) $-1-(e-1)\ln 3$ د) $-1+(e-1)\ln 3$

حل: گزینه ب صحیح است

$$\int_1^e \ln 3x\,dx = x(\ln 3) + x\ln x - x\,\Big|_1^e$$

$$= e\ln 3 - \ln 3 + (e-1)\ln 3 + 1$$

کاربرد اتحادهای مثلثاتی در حل انتگرال

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

اتحاد:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2} = 4\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$$

$$= 4\int \csc^2 2x\,dx = -2\cot 2x + c$$

فرمول های مهم:

$$1)\int (1+\tan^2 u)du = \int \frac{1}{\cos^2 u}du = \int \sec^2 u\,du = \tan u + c$$

$$2)\int (1+\cot^2 u)du = \int \frac{1}{\sin^2 u}du = \int \csc^2 u\,du = -\cot u + c$$

مثال:

$$\int \sin 2x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx \quad \begin{cases} u = 1+\sin^2 x \\ du = 2\sin x \cos x\,dx = \sin 2x\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\sin^2 x\right)^3} + c$$

حالت های دیگر انتگرال

۱) اگر انتگرال ، تابعی گویا از $\cos x, \sin x$ باشد با

تغییر متغیرهای $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ و حل

کرده و سپس در آخر به جای z حرف عبارت $\tan\frac{x}{2}$ قرار می

دهیم . $z = \tan\frac{x}{2}$

مثال: حاصل $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ را بدست آورید؟

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int \frac{dz}{1+z}$$

$$=\ln\left|1+z\right|+c=\ln\left|1+tg\,\frac{x}{2}\right|+c$$

---

۳) اگر انتگرال شامل توان های کسری از متغیر x باشند آن را می توان با تغییر متغیر $x=z^n$ حل کرد که در آن n کوچکترین مضرب مشترک مخرج توان هاست.

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$ را بدست آورید؟

توان های متغیر x ها $\frac{1}{4},\frac{1}{2}$ است که بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$، کوچکترین مضرب مشترک ۴ است سپس تغییر متغیر $x=z^4$ می گیریم.

$$x=z^4 \rightarrow dx=4z^3dz$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}=\int \frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}-\sqrt[4]{z^4}}=\int \frac{4z^3dz}{z^2-z}$$

$$=4\int \frac{z^2dz}{z-1}=4\int (z+1)+\frac{1}{z-1}dz$$

$$=4\left(\frac{z^2}{2}+z+\ln\left|z-1\right|\right)+c=$$

$$4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|\right)+c$$

۴) روش جزء به جزء را قبلاً با جدول برای توابعی چند جمله ای که در $\sin$ یا $\cos$ یا تابع نمایی ضرب شده باشد حل کرده اید حالا می خواهیم روش جزء به جزء را برای ضرب توابع $\sin$ یا $\cos$ در تابع نمایی یا انتگرال مانند $\int \tan^{-1}xdx \int \sin^{-1}xdx$ یا ... بدست آوریم. در این روش از فرمول زیر استفاده کرده $\int udv = uv - \int vdu$ در این روش ضرب دو تابع خواهیم داشت که باید یکی را u و دیگری dv را بگیریم برای انتخاب درست آن تابعی که انتگرال گرفتن از آن آسان تر است را dv و دیگری را u می گیریم.

مثال: حاصل انتگرال $\int \tan^{-1}xdx$ را بدست آورید؟

دو تابع dx و $\tan^{-1}x$ داریم که انتگرال گرفتن از dx راحترازْ $\tan^{-1}x$ است پس $u = \tan^{-1}x , dv = dx$

$$dv = dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} v = x$$

$$u = \tan^{-1}x \xrightarrow{\text{مشتق}} du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{\tan^{-1}x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \tan^{-1}x \times x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + c$$

مثال: حاصل انتگرال $\int e^x \cos xdx$ را بدست آورید؟

$$u = \cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} du = -\sin xdx$$

$$dv = e^x dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} v = e^x$$

$$\Rightarrow \int e^{x}\cos x dx = e^{x}\times\cos x$$
$$+\int \underbrace{e^{x}\sin x dx}_{\substack{u=\sin x\\ dv=e^{x}dx}} = e^{x}\times\cos x + \left(e^{x}\sin x - \int e^{x}\cos x dx\right)$$
$$\Rightarrow \int e^{x}\cos x dx = e^{x}\cos x + e^{x}\sin x$$
$$-\int e^{x}\cos x dx \Rightarrow 2\int e^{x}\cos x dx = e^{x}\cos x + e^{x}\sin x$$
$$\Rightarrow \int e^{x}\cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^{x}\cos x + e^{x}\sin x\right)$$

نکته: به طور کلی از این روش جزء به جزء وقتی استفاده می شود که تابع زیر انتگرال به صورت ضرب دو تابعی باشد که هیچ کدام از آن دو با مشتق گرفتن به صفر نمی رسد.

۵-در محاسبه انتگرال هایی که تابع زیر انتگرال شامل عبارتهای نظیر $\sqrt{a^2-x^2}$ و یا $\sqrt{x^2-a^2}$ و یا $\sqrt{a^2+x^2}$ هستند را با تغییر متغیر های زیر حل می شود.

$\sqrt{a^2-u^2} \rightarrow u = a\sin t$

$\sqrt{u^2-a^2} \rightarrow u = a\sec t$

$\sqrt{a^2+u^2} \rightarrow u = a\tan t$

بدیهی است با توجه به تغییر متغیر های رو به رو در پایان محاسبات با عبارات مثلثاتی سرو کار خواهیم داشت و نیاز به محاسبات مثلثاتی داریم برای سادگی محاسبات با در نظر گرفتن مثلث های قائم الزاویه می توان محاسبات را به سادگی انجام داد.

نکته مهم: این نوع انتگرال ها را نباید با سه نوعی که قبلاً گفته شد اشتباه بگیرید. در سه نوع انتگرالی

که قبلاً گفته شد شکل کلی انتگرال فقط باید به همان صورت باشد یعنی به سه حالت رو به رو:

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} Arctg \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = Arc\sin \frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} Arc\sec \frac{u}{a} + c$$

در غیر این صورت با هر گونه تغییر در شکل تابع زیر انتگرال نمی توان از این سه فرمول استفاده کرده و باید با روش گفته شده در بالا حل شود.

مثال: حاصل $\int \sqrt{1-x^2}dx$ را بدست آورید؟

$$x = 1\sin t \Rightarrow x = \sin t \Rightarrow t = \sin^{-1} x$$

$$dx=\cos t\, dt$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t}.\cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2} 2\sin t \cos t\right) + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

برای برگرداندن تغییر متغیر t به x از مثلث قائم الزاویه استفاده می کنیم.

مثال: حاصل انتگرال $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ را بدست آورید؟

$$x = 3\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{3} \Rightarrow t = \sin^{-1}\frac{x}{3}$$

$$dx = 3costdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{9\sin^2 t.3\cos tdt}{\sqrt{9 - 9\sin^2 t}} = 27\int \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\sqrt{9\left(1 - \sin^2 t\right)t}}$$

$$= \frac{27}{3}\int \frac{\sin^2 t.\cos tdt}{\cos t}$$

$$= 9\int \sin^2 tdt = \frac{9}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c$$

$$= \frac{9}{2}\left(t - \frac{1}{2}.2\sin t.\cos t\right) + c = \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}.\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right) + c$$

$$= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{9}\sqrt{9 - x^2}\right) + c$$

$$3^2 = x^2 + (?)^2$$

$$9 - x^2 = (?)^2 \Rightarrow \sqrt{9 - x^2} = (?)$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

مثال: حاصل انتگرال $\int x^2\sqrt{25 - x^2}dx$ را بدست آورید؟

$$x=5\sin t \Rightarrow \sin t=\frac{x}{5} \Rightarrow t=\sin^{-1}\frac{x}{5}$$

$$dx=5costdt$$

$$\Rightarrow \int 25\sin^2 t.\sqrt{25-25\sin^2 t}.5\cos tdt$$

$$=125\int \sin^2 t.\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt$$

$$=125\int \sin^2 t.\cos^2 tdt=125\int \left(\sin t.\cos t\right)^2 dt$$

$$=\frac{125}{4}\int \left(2\sin t.\cos t\right)^2 dt$$

$$=\frac{125}{4}\int \left(\sin^2 2t\right)=\frac{125}{4}\left(\frac{1}{2}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)\right)+c$$

$$=\frac{125}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+c$$

$$\sin 4t=4\sin t\cos^3 t-4\sin^3 t\cos t$$

$$=\frac{125}{8}\left(t-\frac{1}{4}(4\sin t\cos^3 t-4\sin^3 t\cos t)\right)+c$$

$$=\frac{125}{8}\left(\sin^{-1}\frac{x}{5}-\frac{1}{4}\left(4\frac{x}{5}(\frac{\sqrt{25-x^2}}{5})^3-(\frac{x}{5})^3\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\right)\right)+c$$

$$5^2=x^2+(?)^2$$

$$25-x^2=(?)^2$$

$$\sqrt{25-x^2}=?$$

$$\cos t=\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

تست۱ : حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx$ کدام است؟

الـف) ۱　　　ب) ۲　　　ج) $\sqrt{2}$　　　د) $2\sqrt{2}$

حل: بـا استفـاده از اتـحادهای زیـر مـی تـوان رادیـکال را در جـلوی انـتگرال حذف کـرد.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right) = 2$$

گـزیـنـه ب صحیح است.

تـست۲: اگـر $F(x)=\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ بـاشد حـاصل $F(\pi)-F(\frac{3\pi}{4})$ کـدام است؟

الـف) $\frac{1}{2}$　　　ب) $\frac{1}{4}$　　　ج) $\frac{-1}{2}$　　　د) $\frac{-1}{4}$

حل:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}dx \xrightarrow{1+\tan^2 x \;\frac{1}{\cos^2 x}} \int \frac{\sin x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}dx = \int \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos x}}dx$$

$$= \int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x \cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\cos 2x + c$$

$$F(\pi) - F(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow \frac{-1}{4}\cos 2\pi + \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{4}$$

گـزیـنـه د صحیح است.

تـست۳: حـاصل $\int_0^1 \left||x|-1\right|dx$ کـدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۱- د) $\frac{-1}{2}$

$$\xrightarrow{0<x<1}\int_0^1 |x-1|dx \xrightarrow{x-1}\int_0^1 -(x-1)dx=\frac{-x^2}{2}+x\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

حل: گزینه ب صحیح است

تست۴: حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) π د) ۱

حل:

$$\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{1+(\sin^2 x)^2}dx\Rightarrow$$

$$\begin{cases}u=\sin^2 x\\ du=2\sin x\cos x dx\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=Arctgu=Arc\tan(\sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

گزینه الف صحیح است.

تست۵: اگر $\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\ln A$ باشد مقدار A کدام است؟

الف) $\frac{2}{e}$ ب) $\frac{1}{e+1}$ ج) $\frac{2e}{e+1}$ د) $\frac{e}{e+1}$

حل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} \to \int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} \Rightarrow \begin{cases} u=e^{-x}+1 \\ du=-e^{-x}dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\int_0^1 \frac{-e^{-x}dx}{e^{-x}+1}$$

$$=-\int \frac{du}{u}=-\ln u=-\ln(e^{-x}+1)\Big|_0^1$$

$$=-\ln(\frac{1}{e}+1)+\ln 2=\ln \frac{2}{\frac{1}{e}+1}=\ln \frac{2}{\frac{e+1}{e}}$$

$$=\ln \frac{2e}{e+1}$$

گزینه ج صحیح است.

تست۶: حاصل $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{-1}{3}+\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}$ د) $-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}=\int_0^1 \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x^4-1}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$\int_0^1 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_0^1 (x^2-1)dx+\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\left(\frac{x^3}{3}-x+Arctgx\right)\Bigg|_0^1=\frac{-2}{3}+\frac{\pi}{4}$$

حل: گزینه د صحیح است

تست۷: شیب تابعی برابر با $\frac{dy}{dx}=x+\frac{4}{x^2+1}$ است. اگر تابع از مبدا بگذرد، مقدار تابع در نقطه $x=1$ کدام است؟

الف) $\pi+\frac{1}{2}$ ب) $2\pi+2$ ج) $\pi-2$ د) $\pi-\frac{1}{2}$

حل: در این تست چون مقدار تابع را خواسته باید ابتدا تابع اصلی را بدست آوریم برای این کار از مشتق داده شده انتگرال می گیریم و برای کران های آن چون تابع از مبدا می گذرد و مقدار آن را در $x=1$ می خواهیم بدست آوریم کران های آن را ۰ و ۱ می گذاریم.

$$\int_0^1\left(x+\frac{4}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1 xdx+4\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+4Arctgx\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}+4\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\pi$$

گزینه الف صحیح است.

تست۸: اگر $f'(x)=\dfrac{1+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}$ $\quad f(1)=2,$ باشد حاصل $f(x)$ برابر است با...

الف) $\sqrt{2x-1}+2$ ب) $2\sqrt{2x-1}$

ج) $\sqrt{2x-1}+x$ د) $2\sqrt{2x-1}+x-1$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$\int\frac{1+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx+\int\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}dx=\int(2x-1)^{\frac{-1}{2}}dx+\int 1dx$$

$$\frac{u=2x-1}{du=2dx}\rightarrow\frac{1}{2}\int(2x-1)^{\frac{-1}{2}}2dx+\int 1dx=\frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}du+x+c$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+x+c=(2x-1)^{\frac{1}{2}}+x+c=\sqrt{2x-1}+x+c$$

$$f(x)=\sqrt{2x-1}+x+x\rightarrow f(1)=2\Rightarrow\sqrt{2(1)-1}+1+c=2\Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x-1}+x$$

تست۹: حاصل $\int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) π د) 2π

حل: به روش جزء به جزء

x^2 +	$\cos 2x$
$2x$ −	$\frac{1}{2}\sin 2x$
2 +	$\frac{-1}{4}\cos 2x$
0	$\frac{-1}{8}\sin 2x$

جواب $= +x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - 2x\left(\frac{-1}{4}\cos 2x\right) + 2\left(\frac{-1}{8}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\pi^2 \sin 2\pi + \frac{1}{2}\pi\cos 2\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - (0) = \frac{\pi}{2}$$

گزینه ب صحیح است

تست۱۰- حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} dx$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{1}{6}$ د) 1

حل: گزینه ج صحیح است.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx \Rightarrow \begin{cases} u = 1+\cos x \\ du = -\sin x dx \end{cases} \Rightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x dx}{(1+\cos x)^2}$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos x)^{-2} \times -\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} u^{-2} du = -\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{1}{u} = \frac{1}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{1+\cos 0} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

کاربرد انتگرال در محاسبه مساحت و حجم حاصل از دوران

۱-محاسبه مساحت: یکی از کاربردهای انتگرال معین به فرم $\int_a^b f(x)dx$ بدست آوردن ناحیه هایی است که شکل هندسی خاصی را در ذهن ما ندارند. حال اینکه انتگرال معین چرا و چگونه با مساحت و حجم و... ارتباط دارد، مفهوم وسیعی است که از بحث این جزوه خارج است. در این جزوه فقط فرمول ها و روش محاسبه مساحت و حجم را توضیح خواهیم دارد. با توجه به نمودارهایی که در زیر رسم شده است می توان گفت نمودار هر تابع در فاصله با محورهای مختصات شکل هندسی خاصی را بوجود می آورد که به کمک انتگرال می توان مساحت، حجم، را به صورت عددی محاسبه کرد.

حتی بعضی مواقع ممکن است نمودار تابع محور x ها یا y را در دو یا چند نقطه قطع کند. در این صورت همان طور که در نمود ار شکل زیر نیز دیده می شود می توان برای محاسبه مساحت کل، شکل را تکه تکه کرده و مساحت هر قسمت را جداگانه بدست آوریم، سپس حاصل را به هم جمع کنیم.

محاسبه مساحت با محور x ها:

ابتدا معادله تابع را مساوی صفر قرار داده و x (ریشه ها) را بدست می آوریم اگر xها (اعداد بدست آمده) در فاصله a تا b قرار داشتند با استفاده از فرمول زیر، انتگرال را جدا کرده و جواب ها را جداگانه محاسبه می کنیم ، سپس اعداد بدست آمده را جمع و مساحت کل را بدست می آوریم و با حرفA نشان می دهند.

فرمول محاسبه مساحت $$A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

توجه۱: در حالتی که اعداد (ریشه ها) در فاصله بین a و b نباشد نیازی به جدا کردن انتگرال در فرمول مساحت نمی باشد.

توجه ۲: همیشه مساحت، عددی مثبت است به همین دلیل در فرمول بالا انتگرال داخل قدر مطلق نوشته می شود.

مثال: مساحت زیر نمودار تابع $y = 2x$ با محور xها در فاصله $[-1,1]$ را بیابید؟

حل: ابتدا معادله تابع را مساوی صفر قرار داده

$y = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

چون $x = 0$ در فاصله $[-1,1]$ قرار می گیرد باید انتگرال را در فرمول مساحت جدا کرد (توجه داشته باشید برای جدا کردن انتگرال اعداد به ترتیب و از کوچک به بزرگ نوشته می شوند $1 > 0 > 1-$)

$$A = \left|\int_{-1}^{1} 2xdx\right| = \left|\int_{-1}^{0} 2xdx\right| + \left|\int_{0}^{1} 2xdx\right| = \left|x^2 \Big|_{-1}^{0}\right| + \left|x^2 \Big|_{0}^{1}\right| = 2$$

۲-محاسبه مساحت با محور y ها:

در این حالت نیز باید ابتدا معادله تابع را مساوی صفر قرار داده اما این بار به جای محاسبه x، باید y را

بدست آوریم، اعداد بدست آمده اگر بین a تا b باشند مانند قبل انتگرال را از هم جدا کرده و محاسبه می کنیم. $A=\left|\int_a^b f(y)dy\right|$

تست۱: مساحت محدود به نمودار تابع $x=y^2-1$ با محور y ها در فاصله $[0,1]$کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{4}{3}$

حل:جدول نمودار تابع بر حسب yاست پس از فرمول محاسبه، مساحت یا محورyها استفاده کرده یعنی باید تابع بر حسب yرا مساوی صفر قرار دهیم و y بدست آوریم.

$$y^2-1=y^2=1\rightarrow y=\pm 1$$

عدد۱-در فاصله$[0,1]$ قرار ندارد و عدد۱ خود فاصله داده شده است پس نیازی به جدا کردن انتگرال نیست.

$$A=\left|\int_0^1\left(y^2-1\right)dy\right|=\left(\frac{y^3}{3}-y\right)\Big|_0^1=\left|\frac{-2}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

گزینه ج صحیح است.

تست۲: مساحت ناحیه محدود به نمودار$y=\sqrt{x-1}$ و خط $x=5$ با محورx ها کدام است؟

الف) $\frac{4}{3}$ ب) $\frac{8}{3}$ ج) $\frac{32}{3}$ د) $\frac{16}{3}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$A=\left|\int_1^5 \sqrt{x-1}dx\right|=\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^5=\frac{2}{3}\sqrt[2]{(x-1)^3}\Bigg|_1^5=\frac{16}{3}$$

$$\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

کران پایین

۳-محاسبه مساحت بین دو نمودار تابع با محور x ها:

ابتدا باید محل برخورد دو نمودار را بدست اورده که اعداد بدست آمده همان کران های انتگرال یعنی a و b می شود سپس با جایگذاری در رابطه روبرو مساحت بدست می آید.

$$A=\left|\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx\right|$$

توجه: در فرمول گفته شده ترتیب نوشتن f و g مهم نیست.

مثال: مساحت ناحیه بین دو نمودار $y=2x, y=x^2$ را بدست آورید؟

حل: ابتدا برای بدست آوردن a و b باید محل برخورد تابع را با مساوی قرار دادن دو تابع بدست آوریم.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases} \rightarrow x^2=2x \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_0^2 \left(x^2-2x\right)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \, 2\Big|_0^2\right|=\left|\left(\frac{8}{3}-0\right)-(4-0)\right|=\frac{4}{3}$$

تست۱: مساحت بین دو نمودار تابع $x=y^2, y=x^2$ با محور x ها کدام است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) ۱ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{3}{2}$

حل:
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \to y=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x^2=\sqrt{x}$$

$$\to x^4=x \to x^4-x=0 \to x\left(x^3-1\right)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_0^1\left(x^2-\sqrt{x}\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\right|=\left|\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\right|=\frac{1}{3}$$

گزینه الف صحیح است.

تست۲: مساحت ناحیه محدود بین سهمی $x=\frac{1}{2}y^2$ و خط $y=2x-2$ برابر است با

الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{2}{7}$ ج) $\frac{9}{4}$ د) $\frac{2}{5}$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ x=\frac{1}{2}y^2 \end{cases} \Rightarrow y=2\left(\frac{1}{2}y^2\right)-2 \Rightarrow y=y^2-2 \Rightarrow$$

$$y^2-y-2=0 \Rightarrow (y-2)(y+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-2=0 \Rightarrow y=2 \\ y+1=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_1^2\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}(y+2)\right)\right|=\left(\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}+2y\right)\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{4}$$

تست۳: مساحت محدود به دو نمودار $y=\frac{1}{x^2+1}, y=\frac{1}{x+1}$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{2}+Ln2$ ب) $\frac{\pi}{2}-Ln2$ ج) $(Ln2)-\frac{\pi}{4}$ د) $Ln+\frac{\pi}{4}$

گزینه ج صحیح است.

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x+1} \\ ,y=\dfrac{1}{x+1} \end{cases} \to \frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+1} \to x^2+1=x+1 \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\right|=\left|Ln|x+1|-Arctgx\Big|_0^1\right| \Rightarrow$$

$$=Ln2-\frac{\pi}{4}$$

محاسبه حجم

یکی دیگر از کاربردهای مهم انتگرال معین محاسبه حجم حاصل از دوران (چرخش) نمودار تابع $y=f(x)$ خطوط $x=a$ و یا $y=b$ می باشد

۱-محاسبه حجم نمودار تابع وقتی بر حسب x باشد (یعنی $y=f(x)$ حول خط $y=c$ (علامت c در نظر بگیرید.)

$$V=\pi\int_a^b (f(x)-c)^2 dx$$

۲-محاسبه حجم نمودار تابع وقتی بر حسب y باشد (یعنی $x=f(y)$ حول خط $y=c$ (علامت C در نظر بگیرید.)

$$V=2\pi\int_a^b (y-c)f(y)dy$$

۳-محاسبه حجم نمودار تابع وقتی بر حسب x باشد (یعنی $y=f(x)$ حول خط $x=c$ (علامت C در نظر بگیرید.)

$$V=2\pi\int_a^b (x-c)f(x)dx$$

۴-محاسبه حجم نمودار تابع وقتی بر حسب y باشد (یعنی $x=f(y)$ حول خط $x=c$ (علامت C در نظر بگیرید.)

$$V=\pi\int_a^b\left(f(y)-c\right)^2dy$$

مثال: حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y^2=x^3$، محور x ها و خطوط $x=0$ و $x=4$ حول محور y پدید آید؟

$$y^2=x^3\to y=\sqrt[2]{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$$

حل: وقتی می گوید حول محور y یعنی خط $x=0$ سپس $c=0$ پس از فرمول ۳ که تابع بر حسب x و خط $x=0$ داریم.

$$V=2\pi\int_0^4(x-0)x^{\frac{3}{2}}dx=2\pi\int_0^4x^{\frac{5}{2}}dx=2\pi\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^4=\frac{4\pi}{7}\sqrt[2]{4^7}=\frac{512}{7}\pi$$

تست: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه ای محدود به منحنی $y=x^2+1$ و خطوط $x=2$ و $y=1$ حول خط $x=1$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{8\pi}{3}$ ج) $\frac{2\pi}{3}$ د) $\frac{4\pi}{3}$

حل: گزینه ب صحیح است

$$y=1\to1=x^2+1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$$

$$V=2\pi\int_0^2(x-1)\left(x^2+1\right)dx$$
$$=2\pi\int_0^2\left(x^3+x-x^2-1\right)dx$$
$$=2\pi\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^2=\frac{8\pi}{3}$$

محاسبه حجم ناحیه حاصل از دوران بین دو منحنی

۱-حجم حاصل ازدوران بین دومنحنی $g(x), f(x)$ وحول خط $x=c$

$$V=2\pi\int_a^b(x-c)[f(x)-g(x)]dx$$

۲-حجم حاصل ازدوران بین دومنحنی $g(y), f(y)$ وحول خط $y=c$

$$V = 2\pi\int_a^b (y-c)[f(y)-g(y)]dy$$

۳-حجم حاصل ازدوران بین دومنحنی $g(x), f(x)$ وحول خط $y=c$

$$V = \pi\int_a^b \left[\left(f(x)-c\right)^2-\left(g(x)-c\right)^2\right] dx$$

۴-حجم حاصل ازدوران بین دومنحنی $g(y), f(y)$ وحول خط $x=c$

$$V = \pi\int_a^b \left[\left(f(y)-c\right)^2-\left(g(y)-c\right)^2\right] dy$$

مثال: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی های $y^2=8x, y=x^2$ حول محور x ها را محاسبه کنید؟

حل: محور x ها یعنی $y=0$ پس باید توابع g, f تابعی های x بر حسب y باشند و کران های انتگرال بر حسب

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x \rightarrow y=\sqrt{8x} \end{cases} \Rightarrow x^2=\sqrt{8x} \rightarrow x^4=8x$$

$$\rightarrow x^4-8x=0 \rightarrow x\left(x^3-8\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$V = \pi\int_0^2 \left[\left(x^2-0\right)^2-\left(\sqrt{8x}-0\right)^2\right] dx$$

$$= \pi\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.\left(x^4-8x\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}-8\frac{x^2}{2}\right)\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$$

$$\pi = \left[\left(\frac{2^5}{5}-4(2)^2-0\right)\right] = \pi\left(\frac{32}{5}-16\right) = \frac{48\pi}{5}$$

۳-محاسبه مساحت وقتی معادلات پارامتری باشند:

اگر معادله پارامتری به فرم $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $a \le t \le b,$ باشد از فرمول زیر می توان مساحت را محاسبه کرد.

$$A = \left| \int_a^b f(t) g'(t) dt \right|$$

تست: مساحت سطح محصور به منحنی $C: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$ در فاصله $-1 \le t \le 1$ کدام است؟

الف) $\frac{4}{15}$ ب) $\frac{7}{15}$ ج) $\frac{8}{15}$ د) $\frac{11}{15}$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$A = \left| \int_1^{-1} \left(t^2 - 1\right)\left(3t^2 - 1\right) dt \right| = \left| \int_{-1}^{1} \left(3t^2 - 4t^2 + 1\right) dt \right|$$

$$= \frac{3t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + t \Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$

۴-محاسبه طول قوس (کمان)

محاسبه طول قوس وقتی که $y = f(x)$ باشد

طول قوس $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$

محاسبه طول قوس وقتی که $x = f(y)$ باشد

طول قوس $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(y)\right)^2} dy$

تست: طول قوس منحنی $y = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\right)^{\frac{3}{2}}$ در فاصله $[0,3]$ کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۹ ج) ۱۱ د) ۱۲

حل:

$$y' = \frac{1}{2}(2x)\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}} \to y'^2 = \frac{1}{4}\left(4x^2\right)\left(x^2+2\right) = x^2\left(x^2+2\right) = x^4+2x^2$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \int_0^3 \left(1+x^2\right)dx = \left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 12$$

توجه: اگر منحنی پارامتری باشد طول قوس از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$a \le t \le b, \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad l = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\,dt$$

تست: طول قوس قسمتی از منحنی $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ در فاصله $a \le t \le \pi$ کدام است؟

الف) 4π ب) $4\pi - 1$ ج) 2π د) $2\pi - 1$

حل: گزینه ج صحیح است

$$x = 2\cos t \to f'(t) = -2\sin t \to \left(f'(t)\right)^2 = 4\sin^2 t$$

$$y = 2\sin t \to g'(t) = 2\cos t \to \left(g'(t)\right)^2 = 4\cos^2 t$$

$$l : \int_0^\pi \sqrt{\underbrace{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}_{4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{4\times 1}\,dt$$

$$= \int_0^\pi 2\,dt = 2t\Big|_0^\pi = 2\pi$$

معرفی نماد Σ : اکر بخواهیم دسته ای از اعداد که تعداد آن ها قابل شمارش نیست با هم جمع کنیم برای خلاصه نویسی از نماد Σ استفاده می کنیم به عبارت دیگر:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{100}+a_{101}+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

حدهایی که معنی انتگرال می دهند:

حدهایی به فرم $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ معنی انتگرال می دهند

در واقع

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

به عبارت دیگر:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$
$$=\int_0^1 f(x)dx$$

در رابطه بالا ابتدا باید $f\left(\frac{i}{n}\right)$ را پیدا کرد. $f\left(\frac{i}{n}\right)$

به شرطی بدست می آید که ابتدا $\frac{1}{n}$ در جلوی حد ظاهر شده باشد معمولاً با فاکتورگیری $\frac{1}{n}$ بوجود می آید. برای درک بهتر مثال های زیر را حل می کنیم.

تست ۱: حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{2n^2}\right)$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{4}$ د) $\frac{\pi}{2}$

حل:۱- پیدا کردن $\frac{1}{n}$ در جلوی حد، برای پیدا کردن $\frac{1}{n}$ می توان از n یا توانی از n در مخرج کسر فاکتور گرفت،

با ساده کردن $\frac{1}{n}$ پیدا می شود.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{n}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}+\ldots+\frac{n}{n^2(2)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$

۲-پیدا کردن $\frac{i}{n}$: $\frac{i}{n}$ ها معمولاً از عبارت هایی بدست می آیند که مخرج کسر آن ها n یا توانی از n باشند به جای پیدا کردن $\frac{i}{n}$ های می توان $\frac{1}{n}$ و $\frac{2}{n}$ را در جلوی حد پیدا کرد.

در کسر اول:

$$\frac{1}{n}:\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

در کسر دوم:

$$\frac{2}{n}:\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}$$

۳-پیدا کردن تابع : اگر در کسرها به جای $\frac{1}{n}$ یا $\frac{2}{n}$ ، x قرار دهیم $f(x)$ بدست می آید:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=Arc\tan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

تست۲: حاصل حد $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{(n+3)(n-1)}}\right)$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۶ ج) $\frac{2}{3}$ د) ۰

حل: در تست بالا $\frac{1}{n}$ جلوی حد ظاهر شده است باید $\frac{i}{n}$ را پیدا کنیم و تابع $f(x)$ را بدست آوریم بهتر است دوباره از n در مخرج کسر فاکتور بگیریم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}}+\sqrt{\frac{n}{n\left(1+\frac{6}{n}\right)}}+\ldots\right)$$

$\frac{1}{n}$ و $\frac{2}{n}$ ، از مخرج کسرهای اول و دوم خارج می شوند.

$i=1\to\frac{i}{n}=\frac{1}{n}\to\frac{3}{n}=3\left(\frac{1}{n}\right)$ ، کسر اول

$i=2\to\frac{i}{n}=\frac{2}{n}\to\frac{6}{n}=3\left(\frac{2}{n}\right)$ کسر دوم

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+3x}}=\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$$

$$\Rightarrow 3\int_0^1 (1+3x)^{\frac{-1}{2}}dx=3\left(\frac{2}{3}\sqrt{1+3x}\right)\Big|_0^1=2$$

تست۳: حاصل حد $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\ldots+\frac{\cos(n-1)\pi}{2n}\right)$

کدام است:

الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{2}{\pi}$ ج) ۲ د) ۱

حل:

$$\frac{\pi}{2}$$

کسر اول $\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}\right)$

کسر دوم $\frac{\pi}{n}=\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{n}\right)$

کسر سوم $\frac{3\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{n}\right)$

جواب $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}xdx=\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

گزینه د صحیح است.

محاسبه مقدار متوسط توابع بوسیله انتگرال معین (مقدارمیانگین)

عدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ را مقدار میانگین یا متوسط تابع f روی فاصله $[a,b]$ می نامند.

تست: مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{1+4x^2}$ را در فاصله $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) π د) 2π

حل: گزینه ب صحیح است.

مقدار متوسط $=\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+4x^2}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+\left(2x\right)^2}$

$$=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{1+(2x)^2}dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{1+u^2}=Arctgu$$

$$=Arctg(2x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=Arctg1-Arctg0=\frac{\pi}{4}$$

تذکر: بعضی مواقع گفته می شود عدد c در قضیه مقدار میانگین انتگرال را بدست آورید. در این حالت باید با استفاده از تابع داده شده $f(c)$ را بدست آورده و مساوی عبارت $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ قرار دهیم.

تست: عدد حقیقی در قضیه مقدار میانگین برای انتگرال

$\int_1^5 \frac{x^2-1}{x^2}dx$ کدام است؟

الف) $\sqrt{5}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{7}{3}$

حل:

$$f(c)=\frac{c^2-1}{c^2}=\frac{1}{4}\int_1^5\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^5=\frac{4}{5}$$

$$\frac{c^2-1}{c^2}=\frac{4}{5}\to 4c^2=5c^2-5\Rightarrow 5=c^2\to c=\pm\sqrt{5}$$

$c=-\sqrt{5}$ قابل قبول نیست چون باید در فاصله $[1,5]$ باشد. گزینه الف صحیح است.

بدست اوردن کمترین وبیشترین مقداربرای انتگرال (بدون محاسبه انتگرال)

با استفاده از رابطه زیر می توان بیشترین و کمترین مقدار را برای $\int_a^b f(x)dx$ بدست آورد.

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\le M(b-a)$$

توجه: در حالی که در فاصله $[a,b]$ مشتق تابع همواره مثبت یا همواره منفی باشد.

مشتق مثبت $\begin{cases} M=f(b) \\ m=f(a) \end{cases}$

مشتق منفی $\begin{cases} m = f(b) \\ M = f(a) \end{cases}$

تست: اگر $I = \int_1^3 \sqrt{3+x^3}dx$ باشد کمترین مقدار I کدام است؟

الف) $\sqrt{20}$ ب) $\sqrt{10}$ ج) ۳ د) ۴

حل:

$$f(x) = \sqrt{3+x^3} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{3+x^3}} > 0$$

همواره مثبت $\Rightarrow m = f(a) = f(1) = \sqrt{3+1} = 2$

کمترین مقدار تابع $m(b-a) = 2(3-1) = 4$

گزینه د صحیح است.

مشتق انتگرال:

با استفاده از رابطه زیر می توان مشتق انتگرال را وقتی به جای اعداد b,a را انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ تابعی از قرار دهیم بدست آورد.

$$\left(\int_u^v f(t)\,dt\right)' = v'f(v) - u'f(u)$$

تست: اگر $f(x) = \int_{x^2-1}^{x^3} \sqrt{t^2+1}dt$ باشد حاصل $f'(1)$ کدام است؟

الف) $3\sqrt{2}-2$ ب) $2-3\sqrt{2}$ ج) $2\sqrt{3}-2$ د) $3\sqrt{2}+2$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$f'(x)=3x^2\sqrt{(x^3)^2+1}-2x\sqrt{\left(x^2-1\right)^2+1}\Rightarrow f'(1)=3\sqrt{2}-2$$

حدهایی که جلوی آنها انتگرال داشته باشیم به گونه ای که بعد از جایگذاری عدد در حد حالت $\frac{0}{0}$ (مبهم) بوجود آید:

روش محاسبه حد: برای محاسبه حد باید مشتق صورت و مخرج کسر را جداگانه بدست آوریم و این کار را تا جایی ادامه دهیم که حالت $\frac{0}{0}$ از بین رود سپس دوباره x را در حد قرار داده و جواب بدست آوریم.

تست ۱: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$ کدام است؟

الف) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) ۱ د) $\frac{1}{6}$

حل: اگر به جای x ، صفر قرار دهیم، صورت و مخرج کسر همزمان صفر می شود.

$$x=0\rightarrow\int_0^0\sin\sqrt{t}\,dt=0$$

$$\Rightarrow\lim\frac{2x\sin\sqrt{x^2}}{3x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{3x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{3}=\frac{2}{3}$$

تست۲: حاصل حد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2}{t^4+1}dt$ برابر است با...

الف) صفر　　　ب) ۱　　　ج) $\frac{1}{3}$　　　د) $\frac{1}{8}$

حل: گزینه ج صحیح است

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^3}=\frac{\int_0^0 \frac{t}{t^4+1}}{0}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1\times\frac{x^2}{x^4+1}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2\left(x^4+1\right)}=\frac{1}{3}$$

فصل نهم:

توابع هذلولی- انتگرال ناسره، همگرایی و واگرایی آن ها- محاسبه گشتارو، جرم و مرکز ناحیه ای

توابع هذلولی (هیپربولیک)

از ترکیب توابع نمایی با یکدیگر توابع جدیدی بوجود می آیند که خاصیتی شبیه به توابع مثلثاتی دارند و به همین دلیل ان ها را با نمادهایی مانند نمادهای مثلثاتی نشان می دهند.

$$1)\,y=\sinh x=shx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \left(D_{sh}=R_{sh}=R\right)$$

$$2)\,y=\cosh x=chx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \left(D_{ch}=R,R_{ch}=[1,+\infty)\right)$$

$$3)\,y=\tanh x=thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \qquad \left(D_{thx}=R_{thx}=R\right)$$

$$4)\,y=\coth x=cthx=\frac{chx}{shx}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

$$\left(D_{cthx}=R-\{0\} \qquad R_{cthx}=R\right)$$

تذکر: برای $cthx,thx$ می توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$thx = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad cthx = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

تست۱: مقدار عددی $th(\ln\sqrt{3})$ کدام است؟

الف) ۲ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۱ د) $\frac{1}{3}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$th\left(\ln\sqrt{3}\right) = \frac{e^{2\ln\sqrt{3}}-1}{e^{2\ln\sqrt{3}}+1} = \frac{1}{2}$$

تست۲: ساده شده عبارت $\ln = \sqrt{\frac{1+thx}{1-thx}}$ کدام است؟

الف) x ب) $2x$ ج) $\frac{1}{2}x$ د) ۱

حل: گزینه الف صحیح است.

$$\ln\sqrt{\frac{1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}} = \ln\sqrt{\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}}{\frac{2}{e^{2x}+1}}} = \ln\sqrt{e^{2x}} = \ln e^{x} = x$$

تست: مقدار $cth\left(\ln\sin x\right)$ وقتی $x = \frac{\pi}{4}$:

الف) ۱ ب) ۲- ج) ۳- د) ۳

گزینه ج صحیح است

$$cth(\ln \sin x) = \frac{e^{2\ln \sin x}+1}{e^{2\ln \sin x}-1} = \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1} = \frac{\frac{2}{4}+1}{\frac{2}{4}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3$$

$$5)\, y = \sec hx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} \qquad (D_{sehx} = R_{sehx} = R)$$

مثال: $\sec h(0) = 1$

$$6)\, y = \csc hx = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$(D_{\csc hx} = R - \{0\}, R_{\csc hx} = R)$$

مثال: $\csc h(1) = \dfrac{2e}{e^2-1}$

تذکر: $\csc h(0)$ تعریف نشده است.

اتحادهای توابع هذلولی

$1)\, ch^2x - sh^2x = 1$

$2)\, sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy$

$3)\, ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy$

$4)\, ch^2x + sh^2x = ch2x$

$5)\, sh^2x = \dfrac{ch2x-1}{2}$

$$6)ch^2x=\frac{ch2x+1}{2}$$
$$7)(chx+shx)^n=chnx+shnx=e^{nx}$$
$$8)(chx-shx)^n=chnx-shnx=e^{-nx}$$

بقیه اتحادها را در صفحه ۴۲۰ کتاب مطالعه شود.

مشتق توابع هذلولی

$$1)y=shu\rightarrow y'=u'\times chu$$
$$2)y=chu\rightarrow y'=u'\times shu$$
$$3)y=thu\rightarrow y'=u'\times\left(1-th^2u\right)$$
$$4)y=cthu\rightarrow y'=u'\times\left(1-cth^2u\right)$$

تست۱: مشتق عبارت $(chx-shx)^{\frac{3}{2}}$ در نقطه $x=\ln 4$ کدام است؟

الف) $-\frac{3}{16}$ ب) $-\frac{3}{8}$ ج) $-\frac{3}{4}$ د) $-\frac{3}{2}$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$(chx-shx)^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{-3}{2}x}\rightarrow y'=-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}=-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}\ln 4}$$
$$=\frac{-3}{2}\times\frac{1}{(4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-3}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{-3}{16}$$

تست۲: مقدار مشتق sh^2x+ch^2x در نقطه $x=\ln 2$ کدام است؟

الف) $\frac{15}{2}$ ب) $\frac{15}{4}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{3}{4}$

گزینه ب صحیح است

$$sh^2x + ch^2x = ch2x \to y' = 2sh2x$$
$$= 2\left(\frac{e^{2\ln 2} - e^{-2\ln 2}}{2}\right) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

انتگرال توابع هذلولی

$$1)\int shudu = chu + c$$
$$2)\int chudu = shu + c$$
$$3)\int \left(1 - th^2u\right) du = thu + c$$
$$4)\int \left(1 - cth^2u\right) du = cthu + c$$

مثال: $\int xshx^2dx = \frac{1}{2}\int 2xshx^2dx = \frac{1}{2}chx^2 + c$

تست۱: حاصل $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{ch^2 2x}$ کدام است؟

الف) $\frac{15}{17}$ ب) $\frac{15}{34}$ ج) $\frac{34}{15}$ د) $\frac{17}{15}$

حل: ابتدا تابع جلوی انتگرال را با اتحادها ساده کرده

$$\frac{1}{ch^2dx}=\sec h^2 2x=1-th^2 2x$$

$$\Rightarrow \int\left(1-th^2 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(1-th^2 2x\right)2dx$$

$$=\frac{1}{2}th2x\Big|_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{4\ln 2}-1}{e^{4\ln 2}+1}\right)-0\right)=\frac{15}{34}$$

گزینه ب صحیح است

تست۲ : حاصل $\int_1^4 \frac{sh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ کدام است؟

الف) $ch1-ch2$ ب) $sh1-sh2$

ج) $2(ch2-ch1)$ د) $2(sh1-sh2)$

حل:

$$u=\sqrt{x}\to du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow 2\int_1^4\frac{sh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2ch\sqrt{x}\Big|_1^4$$

$$=2\left(ch2-ch1\right)$$

توابع هذلولی معکوس

$$1)\, y=sh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\qquad\left(\underset{sh^{-1}x}{D}=\underset{sh^{-1}x}{R}=R\right)$$

$$2)\, y=Ch^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\left(\underset{Ch^{-1}x}{D}=[1,+\infty),\ \underset{Ch^{-1}x}{R}=[0,+\infty)\right)$$

$$3)\, y = th^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \qquad \left(\underset{th^{-1}x}{D} = (-1,1),\ \underset{th^{-1}x}{R} = R\right)$$

$$4)\, y = cth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

$$\left(\underset{cth^{-1}x}{D} = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\ \underset{cth^{-1}x}{R} = R\right)$$

تست۱: حاصل عبارت $\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$ با کدام گزینه برابر است؟

الف) $sh^{-1}x$ ب) $\frac{1}{2}sh^{-1}\sqrt{x}$

ج) $2sh^{-1}x$ د) $sh^{-1}\sqrt{x}$

حل: اگر در تعریف $sh^{-1}x$ به جای x ، $\sqrt{x}$ قرار دهیم حاصل به صورت $\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$ می شود

گزینه د صحیح است.

$$sh^{-1}\sqrt{x} = \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}\right) = \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$$

مشتق و انتگرال توابع معکوس هذلولی:

$$1)\, y = sh^{-1}u \to y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = sh^{-1}\frac{u}{a} + c = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+c$$

$$2)\, y = ch^{-1}u \to y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}},$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = ch^{-1}\frac{u}{a} + c = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+c$$

$$3)\ y=th^{-1}u \to y'=\frac{u'}{1-u^2},$$

$$\int\frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{a}th^{-1}\frac{u}{a}+c=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c$$

$$4)\ y=cth^{-1}u \to y'=\frac{u'}{1-u^2},\int\frac{du}{u^2-a^2}$$

$$=\frac{-1}{a}cth^{-1}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

$$5)\ y=\sec h^{-1}u \to y'=\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$$

$$6)\ y=csh^{-1}u \to y'=\frac{u'}{u\sqrt{1+u^2}}$$

تست: حاصل $\int_0^2\frac{dx}{4-x^2}$ کدام است؟

الف) $sh^{-1}1-sh^{-1}0$ ب) $th^{-1}1-th^{-1}0$

ج) $\frac{1}{2}\left(sh^{-1}1-sh^{-1}0\right)$ د) $\frac{1}{2}\left(th^{-1}1-th^{-1}0\right)$

حل: گزینه د صحیح است.

$$\int_0^2\frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{2}th^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(th^{-1}1-th^{-1}0\right)$$

انتگرال های ناسره (غیرعادی)

در انتگرال معین به فرم $\int_a^b f(x)dx$ اگر به جای فاصله $[a,b]$ یکی از فاصله های $(-\infty,a]$ و یا $[a,+\infty)$ و یا $(-\infty,+\infty)$ را بکار ببریم انتگرال را انتگرال ناسره می

نامند که به فرم های $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ نوشته می شوند.

همگرایی و واگرایی انتگرال ناسره

اگر جواب انتگرال ها بالا یک عدد ثابت بدست آید اصطلاحاً انتگرال را همگرا می نامند، اما اگر جواب انتگرال $\pm\infty$ شود انتگرال ناسره را اصطلاحاً واگرا می نامند.

توجه مهم: در حالتی که انتگرال به فرم $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ باشد باید آن را به صورت زیر از هم جدا کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f\left(x\right)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

اگر انتگرال های (۱) و (۲) هر دو با هم همگرا باشند انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ نیز همگرا خواهد بود.

تست: مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx$ کدام است؟

الف) همگرا به a ب) همگرا به $2a$

ج) همگرا به $\frac{2}{a}$ د) واگرا

حل: چون جلوی انتگرال تابع قدر مطلق داریم ریشه عبارت قدر مطلق را بدست آورده و انتگرال را جدا می کنیم.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-a|x|}dx = \int_{-\infty}^{a} e^{ax}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx$$

$$\frac{1}{a}e^{ax}\Big]_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{a}e^{-ax}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}$$

تست: حاصل $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$ کدام است؟

الف) π ب) 2π ج) ۰ د) $\frac{\pi}{4}$

حل: مخرج کسر تابع درجه ۲ می باشد که $\Delta<0$ است.

$$x^2+4x+5=\left(x+\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2+5=(x+2)^2-4+5$$

$$=(x+2)^2+1$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$=Arctg\,(x+2)\Big|_{-\infty}^{0}+Arctg\,(x+2)\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\big(Arctg(2)-Arctg(-\infty)\big)+\big(Arctg(+\infty)-Arctg(2)\big)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

توجه مهم: بعضی مواقع می توان بدون محاسبه انتگرال، همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره را مشخص کرد به نکات زیر توجه کنید(برای حالتی که یک طرف (بالای انتگرال) $+\infty$ باشد):

۱-در حالتی که تابع جلوی انتگرال کسری باشد و عبارت ها در صورت و مخرج کسر چند جمله ای باشند به اختلاف توان ها (بزرگترین توان) در صورت و مخرج نگاه کنید

اگر ($1<$ اختلاف توان) باشد انتگرال همگراست و اگر ($1\leq$ اختلاف توان) انتگرال واگراست

تست: کدامیک از انتگرال های زیر همگراست؟

الف) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ب) $\int_0^{+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$

ج) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ د) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$

حل: فقط گزینه (د) اختلاف توان صورت و مخرج بزرگتر از یک است.

تذکر ۱: بعضی مواقع ممکن است در مخرج کسر عبارت Ln یا عبارت های نمایی در کنار چند جمله ای باشد برای تعیین همگرایی یا واگرایی عبارت نمایی یا Ln را در نظر نمی گیریم و مانند نکته ۱ (در توضیح قبلی) حل می شود.

تست: کدام انتگرال واگراست؟

الف) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\left(1+e^x\right)}$ ب) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\ln x}$

ج) $\int_2^{+\infty}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6-16}}dx$ د) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\left(\ln^2 x\right)}$

حل: گزینه ج صحیح است.

تذکر ۲: $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ اگر $p>1$ باشد انتگرال همگراست.

تذکر ۳: انتگرال $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ به ازای $p\le 1$ واگرا و به ازای $p>1$ همگرا به مقدار $\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$ است.

تذکر ۴: اگر تابع $\sin x$ یا $\cos x$ همراه با توابع چند جمله ای بیاید می توان برای تعیین همگرایی یا واگرایی تابع $\sin x$ و $\cos x$ را در نظر نگیرید و فقط توابع چند جمله ای را با نکات گفته شده تعیین کرد مانند $\int_2^{+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}$ که $\cos x$ را حذف و اختلاف توان صورت و مخرج کمتر از ۱ است پس واگراست و در $\int_1^{+\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[2]{x}}$ میتوان $\sin 2x$ راحذف و چون اختلاف توان صورت و مخرج بیشتر از ۱ است پس همگراست.

۲-یکی دیگر از انواع انتگرال ناسره (غیرعادی) انتگرال هایی هستند که در ان ها b,a عدد ثابت باشند ولی تابع جلوی انتگرال در یکی از اعداد a یا b یا یک عدد بین b,a تعریف نمی شود (مثلاً اگر تابع کسری باشد اعداد a یا b یا یک عدد بین آنها، مخرج کسر را صفر می کند) اگر جواب انتگرال $\pm\infty$ شود انتگرال واگراست.

$: \int_1^3\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_1^3=\ln 2-\ln 0=\ln 2-\infty=-\infty$ واگرا

مثال:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^3 x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = 2\sqrt{x}\Big|_0^3 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{3}$$

$$\int_1^5 \frac{x^2-2x}{x-3}dx = \int_1^3 \frac{x^2-2x}{x-3}dx + \int_3^5 \frac{x^2-2x}{x-3}dx$$

$$= \int_1^3 \left(x+1+\frac{3}{x-3}\right)dx + \int_3^5 \left(x+1+\frac{3}{x-3}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-3|\right)\Big|_1^3 + \left(\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-3|\right)\Big|_3^5 = \infty$$

تعریف گاما $(\Gamma(x))$

$$1)\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$2)\frac{1}{2}\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} dx$$

$$3)\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$4)\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$5)\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$:\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

تست: حاصل $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$ کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ ب) $\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ج) $\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ د) $\frac{3}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

حل: طبق حالت ۲ باید

$$2n-1=4 \rightarrow n=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Gamma(n)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

گزینه د صحیح است.

انتگرال های مهم

جواب سه فرمول نوشته شده از طریق همان روشی که در بالا برای توابع گاما گفته شد استفاده می شود.

الف) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ب) $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

ج) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\pi}$

محاسبه جرم میله، مرکز ناحیه ای و گشتاور جرم میله

تعریف چگالی خطی: جرم در واحد طول را چگالی خطی می نامیم و آن را با نماد ρ نشان می دهند .

محاسبه گشتاور جرم میله نسبت به مبدا: L: طول میله

$$M=\int_0^L x\rho(x)dx$$

محاسبه مرکز جرم میله:

M= گشتاور جرم میله $m=$ جرم کل میله

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x\rho(x)dx}{\int_0^l \rho(x)dx}$$

تست: چگالی میله ای به طول ۳ متر در هر نقطه دلخواه از رابطه $\rho(x) = 1 + 2x$ محاسبه می شود جرم کل گشتاور و مرکز جرم به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

الف) $\frac{15}{4}m, 22/5kgm, 12kg$

ب) $\frac{15}{8}m, 22/5kgm, 12kg$

ج) $\frac{15}{4}m, 22/5kgm, 10kg$

د) $\frac{15}{8}m, 22/5kgm, 10kg$

گزینه ب صحیح است.

گشتاور جرم میله

$$M = \int_0^3 x(1+2x)dx = 22/5kgm$$

جرم کل میله

$$m = \int_0^3 (1+2x)dx = 12kg$$

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{22/5}{12} = \frac{15}{8}$$

محاسبه مرکز ناحیه ای: اگر R ناحیه ای مسطح در صفحه xy باشد مرکز جرم آن نقطه ای است نظیر $A = (\bar{x}, \bar{y})$ به عبارت دیگر اگر L ورقه همگن با چگالی سطحی ثابت ρ و

محصور به $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ باشد و $(\bar{x},\bar{y})$ مختصات مرکز ناحیه ای باشد داریم:

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \qquad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

تذکر ۱: در حالتی که ورقه L همگن است مرکز ثقل همان مرکز ناحیه ای است.

تذکر ۲: اگر ناحیه L دارای محور تقارن باشد مرکز ثقل و مرکز ناحیه ای روی محور تقارن قرار دارند.

در منحنی های $y=-ax^2\pm b, y=-ax^2, y=ax^2\pm b, y=ax^2$ محور y محور تقارن است.

درمنحنیهای

$x=-ay^2+b, x=-ay^2, x=ay^2+b, x=ay^2$ محور x محور تقارن است.

تست: مرکز ناحیه ای بین سهمی $y=4-x^2$ و محور x ها کدام است؟

الف) $\left(\frac{5}{8},4\right)$ ب) $\left(\frac{8}{5},4\right)$ ج) $\left(\frac{5}{8},0\right)$ د) $\left(0,\frac{8}{5}\right)$

حل: گزینه د صحیح است.

$$y = 0 \to x = \pm 2$$

$$\begin{cases} \int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \dfrac{32}{3} \\ \dfrac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \dfrac{256}{15} \end{cases} \Rightarrow \overline{y} = \dfrac{\dfrac{256}{15}}{\dfrac{32}{3}} = \dfrac{8}{5}$$

$$A = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

چون در منحنی $y = 4 - x^2$ محور y ها محور تقارن است طبق تذکر ۲ مرکز ناحیه ای روی محور تقارن قرار می گیرد پس نقاطی که روی محور y ها قرار بگیرند طول آنها صفر خواهد بود پس $\overline{x} = 0$

تذکر ۳- اگر R ناحیه ای باشد محصور بین منحنی های $y = g(x), y = f(x)$ که $a \le x \le b$ در این صورت مرکز ناحیه ای برابر است با

$$m = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx \qquad M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$$

$$M_y = \int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right)dx \qquad \left(\overline{x} = \frac{M_y}{m}, \overline{y} = \frac{M_x}{m}\right)$$

تست۱: مرکز ناحیه ای محدود به منحنی های $y = \sqrt{x}, y = x^3$ کدام است؟

الف) $\left(\dfrac{15}{28}, \dfrac{3}{5}\right)$ ب) $\left(\dfrac{15}{28}, \dfrac{5}{3}\right)$ ج) $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{15}{28}\right)$ د) $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{15}{28}\right)$

گزینه ج صحیح است.

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^3 \end{cases} \Rightarrow x^3=\sqrt{x} \to x^6=x \Rightarrow x^6-x=0$$

$$\Rightarrow x\left(x^5-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$m=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\frac{1}{3} \qquad M_x=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-x^6\right)dx=\frac{5}{28}$$

$$M_y=\int_0^1 x\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\frac{1}{5}$$

$$\left(\bar{x}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}, \qquad \bar{y}=\frac{\frac{5}{28}}{\frac{1}{3}}=\frac{15}{28}\right)$$

مثال: مرکز ناحیه ای محدود به منحنی های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ از خط $x=\frac{\pi}{2}$ تا $x=\pi$ خط را محاسبه کنید.

حل:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 2x dx=0$$

$$m=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin x-\cos x\right)dx=\left(-\cos x-\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$$

$$M_y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\left(\sin x-\cos x\right)dx$$

$$=\left[x\left(-\cos x-\sin x\right)+\sin x-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi}{2}$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}=\frac{3\pi}{4} \qquad \bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{0}{2}=0$$

تذکر: اگر فاصله مرکز ناحیه ای را از محور x هاخواستن، منظور همان بدست آوردن فقط $\bar{y}$ است و اگر فاصله مرکز ناحیه ای را از محور y ها خواستن، محورمنظور همان بدست آوردن فقط $\bar{x}$ است.

تست: فاصله مرکز ناحیه ای بین منحنی های $y=x^3$ و $y=4x$ واقع در ناحیه اول از محور xها کدام است؟

الف) $\frac{64}{21}$ ب) $\frac{16}{15}$ ج) $\frac{15}{16}$ د) $\frac{32}{21}$

حل:

$$4x=x^3\Rightarrow x^3-4x=0\rightarrow x\left(x^2-4\right)=0\begin{cases}x=0\\x=\pm 2\end{cases}$$

$x=-2$ قابل قبول نیست ناحیه اول قرار ندارد

چون فاصله مرکز ناحیه ای را از محور x ها خواسته پس بدست آوردن فقط $\bar{y}$ کافی است.

$$m=\int_0^2 \left(4x-x^3\right)dx=4$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2 (4x)^2-\left(x^3\right)^2\,dx=\frac{256}{21}$$

$$My=\int_0^2 x\left(4x-x^3\right)dx=\frac{64}{15}$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{256}{21}}{4}=\frac{64}{21}$$

تست: مرکز ناحیه ای محدود به $y=2\sin 3x$ و

$y=0, x=\frac{\pi}{3}, x=0$ خطوط کدام است؟

الف) $\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{16}\right)$ ب) $\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$

ج) $\left(\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{8}\right)$ د) $\left(\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{16}\right)$

حل: گزینه الف صحیح است

$$m=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin 3x=\frac{4}{3}$$

$$M_y=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x.2\sin 3xdx=\frac{\pi}{6}$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3xdx=\frac{\pi}{12}$$

$$\overline{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{4}{3}}=\frac{\pi}{8}\qquad \overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{4}{3}}=\frac{\pi}{16}$$

فصل دهم

مختصات قطبی و انتگرال های قطبی- اعداد مختلط و کاربردهای آن

مختصات قطبی

نمایش مختصات دکارتی یک نقطه: در مختصات دکارتی x طول نقطه و y همان عرض نقطه است که در دستگاه xoy نشان می دهند و به فرم $A(x,y)$ یا $A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ نشان می دهند.

نمایش مختصات قطبی یک نقطه: در مختصات قطبی هر نقطه به فرم $A(r,\theta)$ نشان داده می شود که r فاصله نقطه A از مبدا مختصات و θ زاویه ای است که با جهت مثبت محور x ها ساخته می شود برای نمایش دادن یک نقطه با مختصات قطبی ابتدا زاویه θ را روی صفحه پیدا می کنیم سپس به اندازه r واحد (r فاصله تا مبدا) از مبدا مختصات به سمت جلو حرکت می کنیم مثلاً برای نمایش نقطه $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ ابتدا زاویه $\frac{\pi}{6}$ را پیدا کرده سپس به اندازه ۲ واحد به جلو حرکت می کنیم

-اگر در نمایش نقطه r منفی باشد ابتدا نقطه را با فرض r مثبت نشان داده سپس در امتداد خط به اندازه همان r به عقب بر می گردید مثلاً نقطه $A\left(-2,\frac{3\pi}{4}\right)$

-اگر در نمایش نقطه θ منفی باشد ابتدا نقطه را با فرض θ مثبت نشان داده سپس قرینه نقطه نسبت به محور x ها را نمایش داده مثلاً نقطه $A\left(2,\frac{-\pi}{3}\right)$

رابطه بین مختصات قطبی و دکارتی

(تبدیل (x,y) به (r,θ) و بر عکس)

تبدیل دکارتی به قطبی $\longleftarrow$ $r=\sqrt{x^2+y^2}\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

تبدیل قطبی به دکارتی $\longleftarrow$ $x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$

توجه: در محاسبه θ حتماً باید از روی علامت (x,y) ناحیه مختصات را مشخص کرد مثلاً برای نقطه $(x,y)=(-1,2)$ در ناحیه ۲ قرار دارد.

مثال: مختصات دکارتی $A(-1,1)$ را به مختصات قطبی تبدیل کنید؟

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{-1}{1}=\tan^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$$

مثال: مختصات قطبی $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ را به مختصات دکارتی تبدیل کنید؟

$$x=2\cos\frac{\pi}{6}=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\qquad y=2\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1\Rightarrow\left(\sqrt{3},1\right)$$

مثال: معادله خط $2x-3y=5$ در مختصات قطبی به چه صورت است؟

به جای x و y رابطه های آنها را جایگذاری کرده

$$2r\cos\theta-3r\sin\theta=5\Rightarrow r=\frac{5}{2\cos\theta-3\sin\theta}$$

مثال: معادله های دکارتی $r^2=\theta, r=2\sin\theta$ را بدست آورید؟

حل: حتماً برای تبدیل به x و y باید در معادله r^2 داشته باشیم در غیر این صورت دو طرف معادله را در r ضرب می کنید.

$$r=2\sin\theta \xrightarrow{\times r} r^2=2r\sin\theta \to x^2+y^2=2y \to x^2+y^2-2y=0$$

$$\to x^2+\left(y-1\right)^2-1=0 \to x^2+\left(y-1\right)^2=1$$

معادله $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ معادله یک دایره به مرکز (a,b) و به شعاع r می باشد پس در این سوال معادله دایره ای به مرکز $(0,1)$ و به شعاع ۱ است.

$$r^2=\theta \to x^2+y^2=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

بررسی تقارن معادله $r=f(\theta)$

۱-تقارن نسبت به محور x ها (محور قطبی): اگر در معادله با تبدیل θ به $2\pi-\theta$ ، r تغییر نکند، معادله نسبت به محور x ها متقارن است.

اتحادهای کمکی $\sin\left(2\pi-\theta\right)=-\sin\theta$ $\cos\left(2\pi-\theta\right)=\cos\theta$

۲-تقارن نسبت به محور y ها (محور $\frac{\pi}{2}$) : اگر با تبدیل θ به $\pi-\theta$ معادله تغییر نکند، معادله نسبت به محور y ها متقارن است.

$$\sin\left(\pi-\theta\right)=\sin\theta \quad \cos\left(\pi-\theta\right)=-\cos\theta$$

۳-تقارن نسبت به مبدا مختصات (قطب): اگر با تبدیل θ به $\pi+\theta$ معادله تغییر نکند، معادله نسبت به قطب متقارن است.

$$\sin\left(\pi+\theta\right)=-\sin\theta \quad \cos\left(\pi+\theta\right)=-\cos\theta$$

مثال: معادله $r=1-\cos\theta$ نسبت به محور قطبی (محور x ها) متقارن است چون

معادله r تغییر نکرد. $r=1-\cos(2\pi-\theta)=1-\cos\theta$

تست: در کدام گزینه معادله $r=f(\theta)$ نسبت به محور y ها متقارن است؟

الف) $r=1-\cos\theta$ ب) $r=\sin 3\theta$ ج) $r=\sin 2\theta$ د) $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

حل: گزینه ب صحیح است

$$\xrightarrow{\theta\to\pi-\theta} r=\sin 3(\pi-\theta)=\sin(3\pi-3\theta)=\sin 3\theta$$

معادله تغییر نکرد

ضریب زاویه خط مماس بر منحنی قطبی

۱-محاسبه ضریب زاویه خط مماس بر منحنی در نقطه (r,θ)

$$m=\tan\alpha=\frac{\tan\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r}{\dfrac{dr}{d\theta}-r\tan\theta}$$

۲-محاسبه ضریب زاویه خط مماس در قطب: $r=0$ قرار داده و تانزانت زاویه هایی که بدست می آیند همان ضرایب زاویه خط مماس هستند.

تذکر: اگر بخواهیم معادله خط مماس بر منحنی را در قطب بدست آوریم، وقتی $r=0$ قرار دادیم زاویه های بدست آمده معادله های خط مماس در قطب هستند.

تست۱: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r=4$ در نقطه $\left(4,\dfrac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۱- ج) ۲ د) ۲-

حل: گزینه ب صحیح است

$$m=\frac{\tan\theta\frac{dr}{d\theta}+r}{\frac{dr}{d\theta}-r\tan\theta}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}\times 0+4}{0-4\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{-4}=-1\Rightarrow m=-1$$

تست۲: معادله قطبی خطوط مماس بر منحنی $r=2+4\cos\theta$ در قطب کدام است؟

الف) $\theta_2=\frac{2\pi}{3},\theta_1=\frac{4\pi}{3}$ ب) $\theta_2=\frac{\pi}{3},\theta_1=\frac{5\pi}{3}$

ج) $\theta_2=\frac{5\pi}{6},\theta_1=\frac{\pi}{6}$ د) $\theta_2=\frac{7\pi}{6},\theta_1=\frac{5\pi}{6}$

حل: گزینه الف صحیح است

$$r=0\rightarrow 2+4\cos\theta=0\rightarrow\cos\theta=\frac{-1}{2}\rightarrow\begin{cases}\theta=\frac{2\pi}{3}\\ \theta=\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$

تذکر: در تست بالا $\tan\frac{4\pi}{3},\tan\frac{2\pi}{3}$ شیب خطوط مماس هستند.

تست۳: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r=1+\sin\theta$ در نقطه $p\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{3\pi}{4}$ د) π

حل: گزینه ج صحیح است

$$\tan\theta=m=\frac{\tan\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{-1-\sqrt{3}}=-1\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}$$

تذکر۱: معادله $r=r_0$ دایره به مرکز (۰ و ۰) و به شعاع r است.

تذکر ۲: معادله $\theta=\theta_0$ خطی است که از مبدا می گذرد.

مثال: معادله $\theta=\frac{2\pi}{3}$ کدام است؟

معادله خطی که از مبدا می گذرد.

$$\tan\theta=\tan\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{y}{x}=\sqrt{3}\Rightarrow y+\sqrt{3x}=0$$

محاسبه زاویه بین شعاع حاصل و خط مماس

$$\tan\beta=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

تست: زاویه بین شعاع حاصل و خط مماس بر منحنی $r^2=4\cos 2\theta$ در نقطه $p\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{6}\right)$ کدام است.

الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{5\pi}{6}$ ج) $\frac{2\pi}{3}$ د) $\frac{7\pi}{6}$

حل: گزینه ب صحیح است

$$r=2\sqrt{\cos 2\theta}\rightarrow\frac{dr}{d\theta}=\frac{-2\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\qquad r=\sqrt{2}$$

$$\tan\beta=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{-2\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{-2\sin 2\frac{\pi}{6}}{\sqrt{\cos 2\frac{\pi}{6}}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow\tan\beta=\frac{-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\beta=\frac{5\pi}{6}$$

نکته: در معادله به فرم $r=2(1-\cos\theta)$ همیشه $\tan\beta=\tan\frac{\theta}{2}$

زاویه بین دو خط مماس در نقطه تقاطع

$$\tan\beta=\frac{\tan\beta_1-\tan\beta_2}{1+\tan\beta_1\tan\beta_2}$$

تست: زاویه بین خطوط مماس بر نمودارهای $r=4\cos^2\theta, r=4\cos\theta$ در نقطه $A\left(-2,\frac{2\pi}{3}\right)$ کدام است؟

الف) π ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{4}$

حل:

$$r=4\cos\theta\to\frac{dr}{d\theta}=-4\sin\theta\to\tan\beta_1=\frac{-2}{-4\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r=4\cos^2\theta\to\frac{dr}{d\theta}=-8\sin\theta\cos\theta\to\tan\beta_2=\frac{-2}{-4\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{-1}{2}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{-\sqrt{3}}{3}}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\tan\beta=\sqrt{3}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{3}$$

گزینه ج صحیح است

نکته: خطوط مماس بر نقاط تقاطع منحنی های $r=b(1-\sin\theta), r=a(1+\sin\theta)$ بر هم عمود هستند.

تست: زاویه بین خطوط مماس بر منحنی های $r=2+2\sin\theta$ و $r=1-\sin\theta$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{4}$ د) π

حل: طبق نکته قبل زاویه بین خطوط مماس دو منحنی بر هم عمودند پس گزینه ب صحیح است.

$$r=2+2\sin\theta=2\left(1+\sin\theta\right)$$

محاسبه مساحت $r=f(\theta)$

برای محاسبه مساحت منحنی $r=f(\theta)$ در فاصله $[a,b]$ از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b r^r d\theta$$

نکته ۱: در معادله به فرم $r=a\left(1+\cos\theta\right)$ مقدار θ از ۰ تا π تغییر می کند (چون معادله نسبت به محور x ها متقارن است)

نکته ۲: در معادله به فرم $r=a\left(1+\sin\theta\right)$ مقدار θ از $\frac{-\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می کند (چون معادله نسبت به محور y ها متقارن است)

نکته ۳: برای محاسبه مساحت منحنی های $r=a\left(1+\cos\theta\right)$ و $r=a(1+\sin\theta)$ باید در آخر مساحت را ۲ برابر کرد.

تست: مساحت ناحیه $r=1+\cos\theta$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) 2π ج) $\frac{2\pi}{3}$ د) $\frac{3\pi}{2}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1+\cos^2\theta+2\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+2\sin\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

مساحت$=2A=2\times\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$

تذکر: برای منحنی قطبی به فرم $r=\cos 2\theta, r=\sin 2\theta$ را از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{4}$ در نظر بگیریم برای محاسبه مساحت باید جواب آخر را ۸ برابر کنیم یعنی در عدد ۸ ضرب می کنیم.

تست: مساحت ناحیه محصور به منحنی $r=\sin 2\theta$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{\pi}{2}+1$ ج) $\frac{\pi}{2}-1$ د) $2+\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2\theta)^2 d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{16}\Rightarrow \text{مساحت}=8\times\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$$

تست: مساحت ناحیه محصور به $r=e^{2\theta}$ در فاصله $\theta=0$ تا $\theta=2\pi$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{8}\left(e^{8\pi}-1\right)$ ب) $\frac{1}{4}\left(e^{8\pi}-1\right)$ ج) $\frac{1}{8}\left(e^{8\pi}+1\right)$ د) $\frac{1}{4}\left(e^{8\pi}+1\right)$

حل: گزینه الف صحیح است.

تذکر: مساحت ناحیه داخل منحنی $r^2=a^2\cos 2\theta$ برابر با a^2 است.

مساحت بین دو منحنی r_1, r_2

الف) ناحیه داخل و یا خارج دو منحنی: محل برخورد دو منحنی را بدست می آوریم در حالتی که $\theta\neq 0$ باشد زاویه

ها را قرینه هم در نظر می گیرم ، سپس با استفاده از رابطه $A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(r_1^2-r_2^2\right)$ مساحت را محاسبه می کنیم .

ب) برای محاسبه مساحت ناحیه مشترک بین دو منحنی $\begin{cases} r=\sin 2\theta \\ r=\cos 2\theta \end{cases}$ از رابطه $A=\frac{1}{2}\int \cos^2\theta d\theta$ استفاده کرده و کران های آن ها آن را از $\theta=\frac{\pi}{8}$ تا $\theta=\frac{\pi}{4}$ می گیریم و سپس حاصل مساحت بدست آمده را در ۱۶ ضرب می کنیم و برای محاسبه مساحت ناحیه مشترک بین دو منحنی $\begin{cases} r=a\sin\theta \\ r=a\cos\theta \end{cases}$ از رابطه $A=\frac{1}{2}\int a^2\cos^2\theta d\theta$ استفاده کرده و دوباره کران های را از $\theta=\frac{\pi}{4}$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ می گیریم و حاصل مساحت را ۲ برابر می کنیم .

تست: مساحت ناحیه مشترک بین دو منحنی $\begin{cases} r=6\sin\theta \\ r=6\cos\theta \end{cases}$ کدام است؟

الف) $9\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ب) 9π ج) $\frac{\pi}{2}+1$ د) $\frac{\pi}{2}+9$

حل:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}6^2\cos^2\theta d\theta=\frac{36}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=18\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}$$

$$\text{مساحت}=2\times\left(\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}\right)=\frac{9\pi}{2}-9=9\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

محاسبله طول قوس (طول کمان) در منحنی های قطبی

طول قوس (کمان) در منحنی های قطبی برابر است با

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

تست: طول منحنی تابع $r=\sin^3\frac{\theta}{3}$ را در فاصله $[0,3\pi]$ کدام است؟

الف) $\frac{2\pi}{3}$ ب) $\frac{3\pi}{2}$ ج) $\frac{3\pi}{4}$ د) $\frac{4\pi}{3}$

حل: گزینه ب صحیح است

$$r=\sin^3\frac{\theta}{3}\to\frac{dr}{d\theta}=3\times\frac{1}{3}\times\sin^2\frac{\theta}{3}\times\cos\frac{\theta}{3}=\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}$$

$$L=\int_0^{3\pi}\sqrt{\left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2+\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3}+\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}\left(\sin^2\frac{\theta}{3}+\cos^2\frac{\theta}{3}\right)}\,d\theta=\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\sin\frac{2}{3}x\right)\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

اعداد مختلط

معرفی اعداد موهومی: اگر $i=\sqrt{-1}$ قرار دهیم اعداد به فرم $ai\,(a\in R)$ را اعداد موهومی می نامند مانند $\dots,\frac{2}{3}i,-5i,2i$ روی محور $i=(0,1)$ نشان می دهند.

معرفی اعداد مختلط $(\mathbb{C})$: اعداد مختلط از دو قسمت عدد حقیقی و موهومی تشکیل شده است اعداد مختلط را با نماد z که به صورت $z=x+iy$ نشان می دهند.

مثال: اگر $z=-3+5i$ باشد آنگاه $\mathrm{Im}(z)=5,\mathrm{Re}(z)=-3$ است.

جمع و منها در اعداد مختلط

اگر $z_2=x_2+iy_2,z_1=x_1+iy_1$ دو عدد مختلط باشند:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

مثال: اگر $z_2=-4+5i,z_1=2-3i$ و باشند حاصل z_1+z_2,z_1-z_2 را بدست آورید؟

$$z_1-z_2=\big(2-(-4)\big)+i\big(-3-5\big)=6-8i$$

$$z_1+z_2=\big(2+(-4)\big)+i\big(-3+5\big)=-2+2i$$

محاسبه توان های i : اگر $i=\sqrt{-1}$ باشد پس $i^2=-1$ است پس

$$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$$

$$i^8=\left(i^2\right)^4=(-1)^4=1$$

$$i^6=\left(i^2\right)^3=(-1)^3=-1$$

$$i^5=i^4\times i=\left(i^2\right)^2\times i=(-1)^2\times i=+i$$

ضرب دو عدد مختلط

اگر $z_2=x_2+iy_2,z_1=x_1+iy_1$ باشد آنگاه

$$z_1\times z_2=\left(x_1+iy_1\right)\times\left(x_2+iy_2\right)=x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2$$

مثال: اگر $z_2=3+3i,z_1=2-5i$ باشد انگاه

$$z_1\times, z_2=(2-5i)\times(3+3i)=6+6i-15i-15i^2$$
$$=6+i(6-15)+15=21-9i$$

تقسیم دو عدد مختلط

اگر $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ باشد آنگاه

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\times\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

مزدوج یک عدد مختلط: اگر $z=x+iy$ باشد مزدوج آن را با $\bar{z}$ نشان می دهند و به صورت $\bar{z}=x-iy$ است مثلاً اگر $z=3+2i$ باشد آنگاه $\bar{z}=3-2i$ است.

اندازه یک عدد مختلط (طول): اگر $z=x+iy$ باشد آنگاه $,|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad z\bar{z}=|z|^2$ اگر $z=x+iy$ باشد داریم:

$$\mathrm{Im}(z)=y=\frac{z-\bar{z}}{2i}\qquad \mathrm{Re}(z)=x=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

وارون یک عدد مختلط: وارون عدد z را با علامت z^{-1} نشان می دهند. اگر $z=x+iy$ باشد وارون آن از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

مثال: اگر $z=2x-3i$ باشد را بدست آورید.

$$z^{-1}=\frac{2}{13}-\frac{-3}{13}i=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

تست: حاصل عبارت $\dfrac{i^{80}-i+1}{i^{40}+i}$ کدام است؟

الف) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ ب) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ ج) $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ د) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

حل:

$$\begin{cases} i^{80} = \left(i^2\right)^{40} = (-1)^{40} = 1 \\ i^{40} = \left(i^2\right)^{20} = (-1)^{20} = 1 \end{cases} \to \frac{1-i+1}{1+i} = \frac{2-i}{1+i} = (2-i)(1+i)^{-1} = (2-i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

گزینه دصحیح است

تساوی دو عدد مختلط: دو عدد مختلط زمانی z_2, z_1 با هم مساوی هستند که قسمت های حقیقی با هم و قسمت های موهومی آنها با هم مساوی باشد.

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \qquad z_1 = z_2 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

تست: اگر $z_1 = (4+2i)x + (5-3i)y$, $z_2 = 13+i$, $z_1 = z_2$ حاصل $x-y$ کدام است؟

الف) ۱- ب) ۲ ج) ۱+ د) ۲-

حل: گزینه ج صحیح است

$$z_1 = (4+2i)x + (5-3i)y = 4x + 2xi + 5y - 3yi$$
$$= (4x+5y) + i(2x-3y)$$
$$z_2 = 13 + i$$
$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \to y = 1 \qquad x = 2$$
$$\Rightarrow x - y = 2 - 1 = 1$$

قدر مطلق (اندازه) یک عدد مختلط:

$$z = x + iy \to |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تست: مکان هندسی نقطه $z = x+iy$ در رابطه $|z+i| = |z-1|$ کدام است؟

الف) دایره ای به شعاع ۱ و مرکز$(0,0)$

ب) دایره ای به شعاع ۱ و مرکز$(1,0)$

ج) خط $y-x=0$

د) خط $y+x=0$

حل: در رابطه به جای $z=x+iy$ قرار می دهیم.

$$|x+iy+i|=|x+iy-1|$$
$$=|x+i(y+1)|=|(x-1)+iy|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\rightarrow x^2+(y+1)^2=(x-1)^2+y^2$$
$$x^2+y^2+1+2y-x^2-1+2x-y^2=0$$
$$\Rightarrow 2y+2x=0\rightarrow y+x=0$$

گزینه د صحیح است.

خواص قدر مطلق z:

$1)\ |z_1z_2\dots z_n|=|z_1||z_2|\dots|z_n|$

$2)\ |z^n|=|z|^n$ $\quad 3)\ \mathrm{Re}(z)\le|z|$ $\quad 4)\ |z|=|\bar{z}|$

$5)\ |z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ $\quad 6)\ |z_1+z_2+\dots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$

$7)\ |z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$ $\quad 8)\ |z_1+z_2|\ge|z_1|-|z_2|$

$9)\ \big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1-z_2|$ $\quad 10)\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

تست: مکان هندسی مجموعه $A=\left\{\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\le 2\right\}$ در اعداد مختلط کدام است؟

الف) داخل دایره به شعاع $\frac{4}{3}$ و مرکز $\left(0,\frac{5}{3}\right)$

ب) بیرون دایره به شعاع $\frac{2}{3}$ و مرکز $\left(0,\frac{-5}{3}\right)$

ج) بیرون وروی دایره به شعاع $\frac{4}{3}$ و مرکز $\left(0,\frac{-5}{3}\right)$

د) داخل و روی دایره به شعاع $\frac{2}{3}$ و مرکز $\left(0,\frac{5}{3}\right)$

حل:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\frac{|z-i|}{|z+i|}\le 2\rightarrow |z-i|\le 2|z+i|$$
$$\rightarrow |x+iy-i|\le 2|x+iy+i|$$
$$=|x+i(y-i)|\le 2|x+i(y+1)|$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}\le 2\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$\rightarrow x^2+(y-1)^2\le 4\left(x^2+(y+1)^2\right)$$

$$x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\ge 0\Rightarrow x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2\ge\frac{16}{9}$$

گزینه ج صحیح است.

تذکر: اگر $z=x+iy$ باشد در این صورت آرگومان اصلی (مقدار اصلی) از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\theta=Argz=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

مثال: آرگومان اصلی $z=-1-\sqrt{3}i$ را بدست آورید؟

چون y,x و هر دو منحنی هستند پس θ در ربع سوم است.

$$\theta=Argz=\tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)=\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{4\pi}{3}$$

رابطه های مهم:

$$1)\ Arg z^n = n Arg z$$
$$2)\ Arg z_1 z_2 = Arg z_1 + Arg z_2$$
$$3)\ Arg \frac{z_1}{z_2} = Arg z_1 - Arg z_2$$

نکته: اگر z_2, z_1 دو عدد مختلط باشند که $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ در این صورت

$$Arg \frac{z_1}{z_2} = Arg z_1 - Arg z_2 = \frac{\pi}{2}$$

فرم مثلثاتی اعداد مختلط:

در عدد مختلط $z = x + iy$ اگر $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ باشد معادله به صورت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بدست می آید که به آن نمایش مثلثاتی اعداد مختلط می گویند.

مثال :فرم مثلثاتی $z = 1 - i$ را بدست آورید.

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = \tan^{-1}(-1) = \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

رابطه های مهم:

$$1)\ z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$2)\ z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

تست ۱ : حاصل عبارت $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ کدام است؟

الف) ۱   ب) ۱-   ج) i د) $-i$

حل: گزینه (الف)صحیح است

$$\frac{1-i}{1+i}=(1-i)(1+i)^{-1}=(1-i)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-i\rightarrow(-i)^{100}$$
$$=(-1)^{100}(i)^{100}=1$$

تست۲: حاصل عبارت $\left[3(\cos 40+i\sin 40)\right]\left[2(\cos 80+i\sin 80)\right]$ کدام است؟

الف) $3\left(\sqrt{3}i+1\right)$ ب) $3\left(\sqrt{3}i-1\right)$ ج) $3\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ د) $3\left(\sqrt{3}+i\right)$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$
$$=3\times 2\left(\cos(80+40)+i\sin(80+40)\right)=6\left(\cos(120)+i\sin(120)\right)$$
$$=-3+3\sqrt{3}i=3\left(-1+\sqrt{3}i\right)$$

تست۳: اگر $z=1+i$ یک جواب معادله $z^5+az^3+b=0$ باشد مقدار کدام است؟

الف) ۸ ب) ۴ ج) ۴- د) ۲

حل:

$$z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}z^5=\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\\=4\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\z^3=\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow z^5+az^3+b=0 \Rightarrow -4-4i-2a+2ai+b=0$$
$$\Rightarrow (-4-2a+b)+i(-4+2a)=0$$
$$\begin{cases} -4-2a+b=0 \rightarrow -4-4+b=0 \rightarrow b=8 \\ -4+2a=0 \rightarrow a=2 \end{cases}$$

گزینه الف صحیح است.

پیدا کردن ریشه های ام عدد مختلط:

برای پیدا کردن ریشه های n ام یک عدد مختلط ابتدا θ, r را بدست آورده و در رابطه زیر قرار می دهیم.

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right) \quad k=0,1,\ldots,n-1$$

مثال: ریشه های سوم عدد $z=-i$ را پیدا کنید؟ (محاسبه z_2, z_1, z_0)

حل:

$$z=-i \Rightarrow x=0, y=-1 \Rightarrow r=1 \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right) \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{2}$$

$$k=0 \Rightarrow z_0=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+0}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+0}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$k=1 \Rightarrow z_1=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$k=2 \Rightarrow z_2=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}\right)=$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

تذکر ۱: همیشه اختلاف بین دو ریشه ام متوالی یک عدد مختلط برابر $\frac{2\pi}{n}$ است.

تذکر۲: معادله دایره به مرکز z_0 که $z_0=x_0+iy_0$ است به فرم $|z-z_0|=r$ می باشد.

تست: یکی از ریشه های معادله $iz^3+8=0$ به فرم $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ دو تایی (r,θ) کدام است؟

الف) $\left(8,\frac{\pi}{2}\right)$ ب) $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ ج) $\left(2,\frac{5\pi}{6}\right)$ د) $\left(8,\frac{\pi}{6}\right)$

حل: چون توان z در معادله ۳ می باشد پس ریشه های سوم را پیدا می کنیم و در ضمن باید ضریب z^3 یعنی i را از بین ببریم پس طرفین رابطه برابر تقسیم i کرده و داریم

$$iz^3+8=0 \rightarrow z^3+\frac{8}{i}=0$$

$$\frac{8}{i}\rightarrow\frac{8}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{8i}{i^2}=\frac{8i}{-1}=-8i \Rightarrow z^3-8i=0 \rightarrow z^3=8i \rightarrow$$

$$z=\sqrt[3]{8i}\rightarrow r=8,\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$k=0 \Rightarrow z_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\to(r,\theta)=\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$$

$$k=1 \Rightarrow z_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\to(r,\theta)=\left(2,\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$k=2 \Rightarrow z_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$\to(r,\theta)=\left(2,\frac{9\pi}{6}\right)$$

تست: معادله مختلط $3x+2y+5=0$ کدام است؟

الف) $z(1+i)-\bar{z}=0$ ب) $3z-2\bar{z}+5=0$

ج) $\bar{z}z=-5$ د) $z(2+3i)-(2-3i)\bar{z}+10i=0$

گزینه د صحیح است.

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i} \qquad \frac{3}{2}\left(z+\bar{z}\right)+\frac{1}{i}\left(z-\bar{z}\right)+5=0\xrightarrow{\times 2i}$$

$$3i\left(z+\bar{z}\right)+3\left(z-\bar{z}\right)+10i=0$$

نکته: در معادله $(a_0\neq 0)\ a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n=0$ اگر $z_n,\dots,z_2,z_1$ ریشه های معادله باشند

$$z_1+z_2+\dots+z_n=\frac{-a_1}{a_0} \qquad z_1.z_2.\dots.z_n=\frac{(-1)^n a_n}{a_0}$$

تست: در رابطه $2z^2-3z+1=0$ اگر z_2,z_1 ریشه های معادله باشند کدام گزینه صحیح است؟

الف) $3z_1z_2-(z_1+z_2)=0$ ب) $z_1z_2+2(z_1+z_2)=0$

ج) $z_1z_2-3(z_1+z_2)=0$ د) $z_1z_2+3(z_1+z_2)=0$

گزینه الف صحیح است.

فصل یازدهم

تست های مربوط به آزمون های دورهای فراگیر پیام نور

مباحث: انتگرال -اعداد مختلط -مختصات قطبی

۱) حاصل $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}$ برابر کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) ۱

حل: گزینه الف صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3$$
$$=\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{1}{4}$$

۲- اگر $F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{1}{1+t^2}dt$ بباشد حاصل $F'(x)$ کدام گزینه است؟

الف) $\cos^2 x$ ب) $\tan^2 x$ ج) $\sec^2 x$ د) ۱

حل: گزینه د صحیح است.

$$F'(x)=1+\tan^2 x\times\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=1$$

۳-حاصل انتگرال $\int\tan^2 xdx$ برابر است با...

الف) $\sec x+c$ ب) $\sec x\tan x+c$ ج) $\tan x-x+c$ د) $\tan x+c$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$\int\tan^2 xdx=\int\left(1+\tan^2 x-1\right)dx$$
$$=\int\left(1+\tan^2 x\right)dx-\int 1dx=tabx-x+c$$

۴-حاصل $\int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$ کدام است؟

الف) $\ln\sqrt{1-x}+c$ ب) $\ln\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+c$

ج) $\cos^{-1}\sqrt{x}+c$ د) $2\sin^{-1}\sqrt{1-x}+c$

حل: گزینه د صحیح است.

$$u=\sqrt{1-x}\to u^2=1-x\to 2udu=-dx\Rightarrow -2udu=dx\Rightarrow x=1-u^2$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\int\frac{-2udu}{\sqrt{1-u^2}\times u}=-2\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=-2Arc\sin\sqrt{1-x}+c$$

۵-حاصل انتگرال $\int\sqrt{1-4x^2}dx$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ ب) $\frac{1}{4}\left(\sin^{-1}(2x)+2x\sqrt{1-4x^2}\right)$

ج) $\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}(2x)+\sqrt{1-x^2}\right)$ د) $\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}x+x\sqrt{x}\right)$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$2x=\sin t\to 2dx=\cos tdt\to dx=\frac{1}{2}\cos tdt$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{1-(2x)^2}dx=\int\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos^2 t}\times\frac{1}{2}\cos tdt=\frac{1}{2}\int\cos t\times\cos tdt$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\times 2\sin t.\cos t\right)+c$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}\left(\sin^{-1}(2x)+2x\sqrt{1-4x^2}\right)+c$$

$$2x=\sin t\to\sin^{-1}(2x)=t$$

$$1^2=(2x)^2+(?)^2 \Rightarrow ?=\sqrt{1-4x^2}$$

$$\cos t=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{1}=\sqrt{1-4x^2}$$ رابطه فیثاغورث

۶-حاصل انتگرال $\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+x}dx$ کدام است؟

الف) $x+Arctg\,3x$ ب) $\ln\left(x^3+x\right)+3x$

ج) $\ln\left(x^3+x\right)+3Arctgx$ د) $x+Arctg\left(x^3+x\right)$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+x}dx=\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx+\int \frac{3x}{x^3+x}dx$$

$$=\ln\left(x^3+x\right)+3\int \frac{x}{x\left(x^2+1\right)}dx$$

$$=\ln\left(x^3+x\right)+3\int \frac{1}{1+x^2}dx=\ln\left(x^3+x\right)+3Arctgx+c$$

۷-حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+..=\sin\pi.}{n}$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{2}{\pi}$ ج) $+\infty$ د) صفر

حل: گزینه ب صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+...+\sin\pi\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\sin\pi\frac{1}{n}\right)+\left(\sin\pi\frac{2}{n}\right)+\left(\sin\pi\frac{3}{n}\right)+...\right)$$

$$=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

۸-حاصل $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$ کدام است؟

الف) 9π ب) $\frac{9\pi}{2}$ ج) $\frac{9\pi}{4}$ د) $\frac{9\pi}{3}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$x = 3\sin t \to dx = 3\cos t dt$

چون انتگرال معین داریم وقتی تغییر متغیر می دهیم کران های انتگرال هم تغییر می کند.

$$x = 3 \to 3 = 3\sin t \to \sin t = 1 \to t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = -3 \to -3 = 3\sin t \to \sin t = 1 \to t = \left(\frac{-\pi}{2}\right) \text{یا} \ \frac{3\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-9\sin^2 t}.3\cos t dt = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t.3\cos t dt = 9\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{2}$$

۹-فرض کنید $F(x) = \int_0^{\sin x}\left(1-t^2\right)dt$ باشد در این صورت $F''(\pi)$ کدام است؟

الف) صفر ب) π ج) ۱+ د) ۱-

حل: گزینه الف صحیح است.

$$F'(x) = \cos x \times \left(1-\sin^2 x\right) = \cos x \times \cos x = \cos^2 x$$

$$F''(x) = -2\sin x.\cos x \xrightarrow{x=\pi} F''(x) = -2\sin\pi.\cos\pi = 0$$

۱۰- حاصل $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ کدام است؟

الـف) صفـر ب) π ج) $\frac{\pi}{2}$ د) $+\infty$

حل: گزیـنـه ج صحیـح است.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}=Arctg\Big|_0^{+\infty}=Arctg\left(+\infty\right)-Arctg(0)=\frac{\pi}{2}$$

۱۱-حـاصل $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dt$ کـدام است؟

الـف) $\frac{3}{2}$ ب) ۱ ج) $\frac{1}{2}$ د) صفـر

حل: گزیـنـه ج صحیـح است.

$$\frac{1}{2}\Gamma(n)=\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx\Rightarrow 2n-1=1\Rightarrow n=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\Gamma(1)=\frac{1}{2}(1-1)!=\frac{1}{2}\times 0!=\frac{1}{2}\qquad 0!=1$$

۱۲-انـتـگرال نـامـعین $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}dx$ بـرابـر است بـا...

الـف) $-2\cos\sqrt{x}+c$ ب) $\frac{1}{2}\sin\sqrt{x}+c$

ج) $2\sin\sqrt{x}+c$ د) $\frac{-1}{2}\cos\sqrt{x}+c$

حل: گزیـنـه د صحیـح است.

$$\frac{1}{4}\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx\xrightarrow[\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=du]{\sqrt{x}=u}\frac{1}{4}\times 2\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin u\,du=\frac{-1}{2}\cos u+c=\frac{-1}{2}\cos\sqrt{x}+c$$

۱۳-انـتـگرال نـامـعین $\int x\,(x+3)^5dx$ بـرابـر است بـا...

الف) $\frac{1}{7}(x+3)^7-\frac{1}{2}(x+3)^6+c$ ب) $\frac{1}{6}x\,(x+3)^6+c$

ج) $\frac{1}{12}(x+3)-(x+3)^6+c$ د) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}(x+3)^6+c$

حل: گزینه الف صحیح است.

$x+3=u \rightarrow x=u-3 \rightarrow dx=du$

$$\Rightarrow \int x(x+3)^5dx=\int (u-3).u^5.du=\int \left(u^6-3u^5\right)du=\frac{u^7}{7}-3\frac{u^6}{6}+c$$

$$=\frac{(x+3)^7}{7}-\frac{1}{2}(x+3)^6+c$$

۱۴-حجم جسم دوار حاصل از ناحیه محدود به منحنی $y=x^3$ محور y ها و خط $y=1$، حول محور y ها کدام است؟

الف) 3π ب) 5π ج) $\frac{5\pi}{3}$ د) $\frac{3\pi}{5}$

حل: گزینه د صحیح است، چون ناحیه محدود به منحنی $y=x^3$ و محور yها و خط $y=1$ را می خواهیم باید تابع را بر حسب y بنویسیم.

$y=x^3 \rightarrow x=\sqrt[3]{y}$

$x=0 \rightarrow y=0^3=0 \Rightarrow y=0$

$$\Rightarrow v=\pi\int_a^b \left(f(y)-c\right)^2dy=\pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{y}-0\right)^2dy=\pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}dy$$

$$=\pi\,\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1=\frac{3\pi}{5}$$

۱۵-انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$:

الف) واگرا است ب) همگرا است

ج)نه همگرا و نه واگرا   د) هیچکدام

حل: گزینه ب صحیح است.

با توجه به نکته گفته شده اگر $\sin x$ را در صورت در نظر نگیریم اختلاف توان صورت و مخرج بیشتر از ۱ است پس همگرا است.

۱۶-حاصل $\int_0^3 [x]dx$ برابر است با ...

الف) صفر   ب) ۱   ج) ۲   د) ۳

حل: گزینه د صحیح است.

$$= \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 [x]dx = \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx =$$

$$= 0 + x\Big|_1^2 + 2x\Big|_2^3 = 1 + 2 = 3$$

۱۷-حاصل $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ برابر است با ...

الف) $\tan^{-1}(x+1)+c$ ب) $\tan^{-1}(x-1)+c$

ج) $\ln|x+1|+c$ د) $\frac{1}{(x+1)^2+1}$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$x^2+2x+2 = \left(x+\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 2 = (x+1)^2+1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = Arctg\,(x+1)+c$$

۱۸-حاصل $\int_0^2 \frac{x-1}{\sqrt{1+4x}}dx$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{6}$ د) $\frac{-1}{6}$

حل:گزینه ج صحیح است.

$$\sqrt{1+4x}=u \to 1+4x=u^2 \to 4dx=2udu \to dx=\frac{1}{2}udu$$

$$\to 4x=u^2-1 \to x=\frac{u^2-1}{4}$$

$$x=0 \to \sqrt{1+4(0)}=u \to u=1$$
$$x=2 \to \sqrt{1+4(2)}=u \to u=3$$

۱۹-حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و محورهای مختصات حول محور x ها چقدر است؟

الف) $\frac{\pi}{15}$ ب) $\frac{\pi}{10}$ ج) $\frac{\pi}{6}$ د) $\frac{\pi}{5}$

حل: گزینه الف صحیح است.

تابع را بر حسب x نوشته و حول محور x ها یعنی $y=0$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \Rightarrow \sqrt{y}=1-\sqrt{x} \to y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$$

$$y=0 \to x=1 \Rightarrow v=\pi\int_0^1\left(f(x)-c\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{x}\right)^4dx$$

$$\to\begin{cases}1-\sqrt{x}=u \to 1-u=\sqrt{x}\\ -du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx\\ -2\sqrt{x}du=dx\end{cases}$$

$$=\pi\int u^4\times-2\left(1-u\right)du=-2\pi\int\left(u^4-u^5\right)du=-2\pi\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^6}{6}\right)$$

$$=-2\pi\left(\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^5}{5}-\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{15}$$

۲۰-حاصل $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$ برابر است با ...

الف) $\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$ ب) $\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right)+c$

ج) $\frac{1}{6}\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right)+c$ د) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x^2}{3}\right)+c$

حل: گزینه د صحیح است.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3^2-\left(x^2\right)^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{3^2-\left(x^2\right)^2}}=\frac{1}{2}Arc\sin\left(\frac{x^2}{3}\right)+c$$

۲۱-حاصل $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ کدام است؟

الف) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ ب) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ ج) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ د) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$x^2+x+1 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}=\int_1^{\infty} \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int_1^{\infty} \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}Arctg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_1^{\infty}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg(\infty)-\frac{2}{\sqrt{3}}Arctg\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

۲۲-فرض کنید $\int f(x)dx=\sin^2 x-4x^3+8$ باشد در این صورت $f(x)$ کدام است؟

الف) $\sin 2x-12x^2$ ب) $2\cos x-12x^2+8x$

ج) $2\sin x-12x^2+8x$ د) $-\cos^2 x-x^2+8x$

حل: گزینه الف صحیح است.

ضابطه تابع $f(x)$ همان مشتق تابع اولیه یا اصلی داده شده است.

$$\left(\sin^2 x-4x^3+8\right)'=f(x)\Rightarrow 2\sin x\cos x-12x^2=\sin 2x-12x^2$$

۲۳-حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx$ برابر است با ...

الف) صفر ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{1}{4}$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right).\sin xdx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\cos^2 x.\sin x\right).dx=$$

$$-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.\sin xdx=-\cos x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.+\frac{\cos^3 x}{3}\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right.=\frac{2}{3}$$

۲۴-حاصل $\int_3^{\sin x}\cos xdx$ کدام است؟

الف) $3^{\sin x}+c$ ب) $3^{\sin x}.\ln 3+c$

ج) $\frac{1}{\ln 3}3^{\sin x}+c$ د) $\ln 3^{\sin x}+c$

گزینه ج صحیح است.

$$u=\sin x\rightarrow du=\cos xdx$$

$$\int_3^{\sin x}\cos xdx=\frac{1}{\ln 3}.3^{\sin x}+c$$

۲۵-مساحت ناحیه محدود به نمودار $y=\sqrt{x},y=x^3$ برابر است با ...

الف) $\frac{14}{5}$ ب) $\frac{7}{6}$ ج) $\frac{3}{5}$ د) $\frac{5}{12}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^3 \end{cases} \Rightarrow x^3=\sqrt{x} \to x^6=x \Rightarrow x^6-x=0 \Rightarrow$$

$$x\left(x^5-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$A=\left|\int_0^1\left(x^3-\sqrt{x}\right)dx\right|=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\left|\frac{-5}{12}\right|=\frac{5}{12}$$

۲۶-حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی $x=y^2$ و خطوط $x=0$، $y=1$ و حول خط $y=2$ عبارتست از...

الف) $\frac{6\pi}{5}$ ب) 6π ج) $\frac{5\pi}{2}$ د) 5π

حل:گزینه ج صحیح است.

تابع بر حسب y حول خط $y=2$

$$x=0 \Rightarrow 0=y^2 \Rightarrow y=0$$

$$V=2\pi\int_a^b\left(y-c\right)f\left(y\right)dy=2\pi\int_0^1\left(y-2\right)y^2dy=$$

$$2\pi\left(\frac{y^4}{4}-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5\pi}{6}$$

۲۷-اگر z_2,z_1 دو عدد مختلط باشند کدام عبارت درست است؟

الف) $|z_1-z_2|\le|z_1|-|z_2|$ ب) $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1-z_2|$

ج) $|z_1+z_2|\le\big||z_1|-|z_2|\big|$ د) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\le|z_1|-|z_2|$

حل: گزینه ب صحیح است. به ازای هر $z_2,z_1\in\mathbb{C}$

$1)\ |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$2)\ \big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2|$

$3)\ |z_1|-|z_2| \le |z_1+z_2|$

$4)\ |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$5)\ \big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1-z_2|$

۲۸- فرض کنید $z_1=2(\cos40+i\sin40)$ و $z_2=\cos8+i\sin8$ در این صورت $\arg\left(\frac{z_1^4}{z_2^{10}}\right)$ برابر است با

الف) ۴۰ ب) ۸ ج) ۵ د) ۸۰

حل: گزینه د صحیح است اگر $\arg z=\theta$ آنگاه

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2, \qquad \arg z^n=n\theta$$

$$\arg z_1=40 \rightarrow \arg z_1^4=4\times40=160$$

$$\arg z_2=8 \rightarrow \arg z_2^{10}=10\times8=80$$

$$\Rightarrow \arg\frac{z_1^4}{z_2^{10}}=160-80=80$$

۲۹-مقدار عبارت $\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}$ برابر است با

الف) $-i$ ب) ۱ ج) i د) $1+i$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}\times\frac{x+i\sqrt{1+x^2}}{x+i\sqrt{1+x^2}}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+ix\right)\left(x+i\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2+1+x^2}$$

$$=\frac{x\sqrt{1+x^2}+i\left(1+x^2\right)+ix^2+i^2x\sqrt{1+x^2}}{2x^2+1}=\frac{i\left(1+2x^2\right)}{2x^2+1}=i$$

۳۰-نقطه $p\left(3,\frac{-2\pi}{3}\right)$ در دستگاه مختصات قطبی باشد دوتایی مرتب دیگری که $r<0$ و $-2\pi<\theta<0$ باشد عبارتست از...

الف) $\left(-3,\frac{-4\pi}{3}\right)$ ب) $\left(-3,\frac{-2\pi}{3}\right)$ ج) $\left(-3,\frac{-5\pi}{3}\right)$ د) $\left(-3,\frac{-7\pi}{3}\right)$

حل: گزینه ج صحیح است.

نقطه $\left(3,\frac{-2\pi}{3}\right)$ در ربع سوم قرار دارد برای یافتن دوتایی دیگری که هم r و θ هم آن منفی شود ابتدا r را منفی کرده پس نقطه از ربع سوم به ربع اول می افتد و بعد θ را منفی کرده پس قرینه نسبت به محور x ها می شود یعنی در ربع چهارم قرار می گیرد در این ربع چون صورت کسر از دو برابر مخرج یک واحد کمتر است پس $\theta=\frac{-5\pi}{3}$

۳۱- اگر در منحنی $r=a\cos\theta$ زاویه بین خط مماس و شعاع حامل آن را α بنامیم رابطه بین α و θ کدام است؟

الف) $\alpha=2\theta$ ب) $\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$ ج) $\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$ د) $\alpha=\pi-\theta$

حل: گزینه ب صحیح است.

$$\tan\alpha=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}\longrightarrow\tan\alpha=\frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta}\Longrightarrow\tan\alpha=-\cot\theta$$

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\Longrightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$$

۳۲- هرگاه $z=1+i$ مقدار z^4 کدام است؟

الف) $1-i$ ب) i ج) 1 د) -۴

حل: گزینه د صحیح است.

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$
$$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$
$$\rightarrow z^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$$
$$z^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos 4\frac{\pi}{4}+i\sin 4\frac{\pi}{4}\right)=-4$$