جزوه ریاضی مهندسی

جناب استاد حمیده

تهیه و تنظیم : سرکار خانم ثقفی
نیمسال دوم۹۱_۱۳۹۰
پیام نور مرکز شمیرانات
http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

جلسه اول.

فصل ۱.

اعداد مختلط: (یک یا دو تست و یک سؤال تشریحی حتماً دارد.)

گسترش اعداد حقیقی در رسیدن به اعداد مختلط:

$x^2+1=0 \longrightarrow x^2=-1$

$i^2=-1 \longrightarrow x^2=i^2 \longrightarrow x=\pm i$

فرم عدد مختلط $= x+iy$ $\qquad z=5$

Rez حقیقی $\qquad$ موهومی Imz $\qquad z=5-4i$

$z_1=x_1+iy_1 \qquad z_2=x_2+iy_2$

$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1y_2i+iy_1x_2+i^2y_1y_2$

$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

$z=x+iy \xrightarrow{z \text{ مزدوج}} \bar{z}=x-iy$

$$z_1/z_2=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\times\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)+\left(\frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}\right)i$$

وارون ضربی.

z وارون ضربی $\leftarrow Sz=(1,0) \Rightarrow z^{-1}z=(1,0)$

$$\Rightarrow z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}\;,\;\frac{-y}{x^2+y^2}$$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

مثال، $z = 5+2i \quad z^{-1} = ?$

$$z^{-1} = \left(\frac{5}{29}, \frac{-2}{29}\right) = \frac{5}{29} - \frac{2}{29} i$$

نکته. با استفاده از تبدیلهای زیر هر رابطه دلخواهی را می‌توان برحسب z و $\bar{z}$ نوشت.

$$\left(x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \right)$$ (حتماً سؤال می‌آید.)

مثال ۱. معادله مختلط هذلولی زیر را به دست آورید.

تمرین ۸۹.

$x^2 - y^2 = 1$

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = 1 \implies$$

$$\frac{z^2+\bar{z}^2+2z\bar{z}+z^2+\bar{z}^2-2z\bar{z}}{4} = 1 \implies z^2+\bar{z}^2 = 2$$

نکته.

1. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1/z_2} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
4. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
5. $|z_1-z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
6. $\operatorname{Im} z \leq |z|$
7. مهم $z\bar{z} = |z|^2$
8. $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$
9. $z \cdot \bar{z} = x^2+y^2$
10. $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$
11. $\operatorname{Re} z = x \leq \sqrt{x^2+y^2} \implies \operatorname{Re} z \leq |z|$

مهم

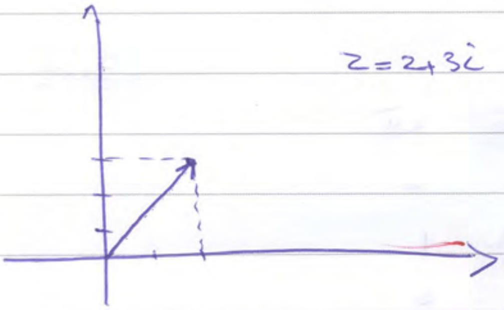
http://www.ab-rafiee.com

WWW.AB-RAFIEE.COM

نمایش روی دستگاه مختصات:

مثل یک عدد عادی به آن نگاه می‌شود.

$z=2+3i$



نکته مهم: فرض کنیم $k>0$ و z_1 و z_2 دو عدد مختلط ثابت باشند آنگاه:

مکان هندسی $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$

صورت آن، اگر:

$$\begin{cases} k\neq 1 \rightarrow \text{دایره} \\ k=1 \rightarrow \text{خط عمود منصف که } z_1 \text{ را به } z_2 \text{ وصل می‌کند.} \end{cases}$$

مثال ۱: مکان هندسی نقاطی که در رابطه $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\sqrt{2}$ صدق می‌کند عبارت است از؟

دایره (با توجه به نکته قبلی) است.

نکته مهم: صورت قطبی عدد مختلط $\underline{z=x+iy}$ (صورت دکارتی) عبارت است از:

$$\begin{cases} z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \\ r=\sqrt{y^2+x^2} \\ \theta=\arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

مثال ۱: $z=1-i$

$x=1$

$y=-1$

$r=\sqrt{2}$

$\theta=\tan^{-1}\frac{-1}{1}=\tan^{-1}(-1) \Rightarrow \theta=\frac{-\pi}{4}$

$\Rightarrow z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

www.AB-RAFIEE.com

Year. Month. Date. ( )

یادآوری .

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/3$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	1
tang	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	0
cotg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\infty$	∞

اول	دوم	سوم	چهارم
+	+	−	−
+	−	−	+
+	−	+	−
+	−	+	−

توان و ریشه n ام یک عدد مختلط .

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ فرمول دموآر

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

مثال، $(1-i)^{16} \to z = 1-i$ $\qquad r=\sqrt{2}$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right)$

$z^{16} = \sqrt{2}^{16}\cos\left(16 - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(16 - \frac{\pi}{4}\right) = 2^8\cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi$

$= 2^8(1+0) = 2^8$

Year. Month. Date. ( )

مثال: $(1-i\sqrt{3})^{-10}$

$z = 1+i\sqrt{3} \quad x=1 \quad y=\sqrt{3} \quad r=2 \rightarrow \theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \pi/3$

$z^{-10} = 2^{-10}\left(\left(\cos -10\pi/3\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right) = 2^{-11}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$

ریشه nام (حتماً سؤال تشریحی دارد.)

برای بدست آوردن ریشه nام یک عدد مختلط ابتدا صورت قطبی آن را بدست می‌آوریم سپس صورت قطبی را به صورت زیر می‌نویسیم.

$z = x+iy$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = r(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi))$

سپس از فرمول دموآور استفاده نموده و ریشه nام را به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \\ k=0,1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

نکته: $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$ نشان دهنده محور عرض‌ها است.

مثال: جواب‌های معادله زیر را بدست آورید. $z^3-1=0 \rightarrow z^3=\pm 1 \rightarrow z=(+)^{1/3}$

$$\begin{cases} z=1 \\ x=1 \quad \theta = \arctan 0 \rightarrow z = (\cos 0 + i\sin 0) = z(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) \\ y=0 \\ r=1 \end{cases}$$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

$$z^{1/3} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$k=0 \Rightarrow z^{1/3} = 1$$

$$k=1 \Rightarrow z^{1/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -1/2 + \sqrt{3}/2\, i$$

$$k=2 \Rightarrow \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - \sqrt{3}/2\, i$$

مثال: معادله $z^3-1=0$ چند ریشه مختلط دارد؟

۲ ریشه مختلط دارد. (طبق مثال قبل).

مثال: ریشه سوم عدد ۱ چند جواب حقیقی دارد؟

۱ ریشه حقیقی دارد. (طبق مثال قبل).

http://www.ab-rafiee.com

WWW.AB-RAFIEE.com

جلسه دوم.

فصل ۲. متغیرهای مختلط.

(از این به بعد همه‌ی سوال‌ها شبیه هم می‌آید.)

همسایگی: نقاطی که فاصله‌شان از نقطه a کمتر از ε است. (دایره‌ای به شعاع ε a)

$|z-a|<\varepsilon$

نقطه حدی: a نقطه حدی مجموعه S است اگر هر همسایگی آن شامل نقطه‌ای از مجموعه S باشد.

نقطه داخلی: a نقطه داخلی مجموعه S است اگر یک همسایگی آن وجود داشته باشد که در S باشد.

نقطه خارجی: a نقطه خارجی مجموعه S است اگر یک همسایگی آن وجود داشته باشد که در S نباشد.

نقطه کرانه‌ای: نقطه‌ای است که نه داخلی است و نه خارجی است. (مثلاً روی مرز باشد، نقطه‌ای که روی مرز است.)

مجموعه باز: مجموعه‌ای است که تنها شامل نقاط داخلی خود باشد.

مجموعه بسته: متمم مجموعه باز، بسته نامیده می‌شود. (به عبارت دیگر هر نقطه حدی عضو مجموعه S باشد.)

مجموعه کراندار: $|z|<1$

مجموعه همبند: مجموعه‌ای است که اگر دو نقطه از آن را به دلخواه انتخاب و به هم وصل کنیم خط حاصل در مجموعه باشد.

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

ناحیه باز : مجموعه‌ای بازی که همبند باشد را گویند.

بستار S : مجموعه بسته‌ای است از S و نقاط حدی آن.

مثال مهم ← (سؤال امتحانی) $S=\{z_n \mid z_n=\frac{i^n}{n}, \quad n=1,2,\dots\}$

(امتحانی)

مجموعه‌ی بالا کراندار است. $S=\{i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{3}, \dots\}$

" بسته نیست (چون $z=0$ در آن قرار ندارد)

" نقطه‌ی داخلی ندارد. (مجموعه گسسته نقطه‌ی داخلی ندارد)

" نقطه‌ی حدی‌اش صفر است. (حد دنباله ← صفر نقطه‌ی حدی‌اش است.)

" باز نیست.

" همبند نیست.

" ناحیه نیست.

" تمام نقاط آن + صفر بستار آن می‌باشد.

مثال: مجموعه $\frac{\pi}{4} > \arg z > 0$ و $|z|>0$ ؟ (سؤال امتحانی)

← آرگومان

نه باز است و نه بسته است.

$\arg z = [0, \frac{\pi}{4}]$

$Arg\, z = \theta = \arctan \frac{y}{x}$

تابع مختلط :

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$\Rightarrow f(z)=2xy+5\sin x\, i$

http://www.ab-rafiee.com

(سؤال مهم امتحانی)

مثال ۱: تصویر خط $y=x$ را تحت نگاشت $\omega=iz^2$ بدست آورید.

$$z=x+iy$$

$$z^2=x^2-y^2+2xyi \longrightarrow iz^2=x^2i-iy^2-2xy=(x^2-y^2)i-2xy$$

$$\begin{cases}\omega=iz^2=(x^2-y^2)i-2xy\\ y=x\end{cases} \Rightarrow$$

$$\omega_0=-2x^2<0 \quad \longrightarrow u=-2x^2 \quad\quad \longrightarrow v=0$$

تصویر: $u<0$ و $v=0$

معادلات کوشی - ریمان: (تشریحی و تستی)

نکته: تابع $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=z_0$ مشتق‌پذیر است اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

1. معادلات کوشی ریمان در خصوص آن برقرار باشد.
2. در همسایگی z_0 مشتقات جزئی پیوسته نسبت به x و y وجود داشته باشد.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] -\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \Leftarrow \text{معادلات کوشی - ریمان}$$

نتیجه: برقراری معادلات کوشی - ریمان شرط لازم و نه کافی برای مشتق‌پذیری در نقطه z_0 می‌باشد.

http://www.ab-rafiee.com

مثال ۱۲۴: مشتق پذیری تابع زیر را در صفحه مختلط بررسی کنید:

$f(z) = z \operatorname{Re} z$

$$f(z) = (x+iy)\,x \;\rightarrow\; f(z) = x^2 + xyi \qquad \begin{cases} u = x^2 \\ v = xy \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \overset{?}{=} x \\ 0 \overset{?}{=} -y \end{cases} \longrightarrow$$

شرط برقراری کوشی - ریمان فقط در $z=0$ برقرار است پس در سایر نقاط مشتق پذیر نیست.

$$f'(0)_{z \to (x,0)} = \lim \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f'(0)_{z \to (0,y)} = \lim \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim \frac{0 - 0}{0 - 0} = 0$$

پس در نقطه $z=0$ مشتق پذیر است.

http://www.ab-rafiee.com

مثال مهم ۱ نشان دهید تابع روبرو
در $z=0$ مشتق‌پذیر نیست ولی معادلات
کوشی ریمان در آن برقرار است.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(1+i)\,xy}{x^3+y^3} & z\neq 0\\[2mm] 0 & z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{xy}{x^3+y^3}\\[2mm] v=\dfrac{xy}{x^3+y^3}\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y(x^3+y^3)-3x^2(xy)}{(x^3+y^3)^2}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x(x^3+y^3)-3y^2(xy)}{(x^3+y^3)^2}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

چون در مشتق‌گیری با صفر مواجه می‌شویم و $\frac{0}{0}$ می‌شود از تعریف استفاده می‌کنیم.

$$\underset{z\to(x,0)}{f'(0)}=\lim\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim\frac{0-0}{x-0}=\lim\frac{0}{0^+}=\lim\frac{0}{0^-}=0$$

$$\underset{z\to(0,y)}{f'(0)}=\lim\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim\frac{0-0}{y-0}=0$$

نکته. در نقطه صفر مشتق جزئی وجود دارند و برابر است ولی از آن‌جا که $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$
در نقطه صفر پیوسته نیستند (در هر صورت از هر مسیر حد متفاوت است). پس شرط لازم مشتق‌پذیری

http://www.ab-rafiee.com

هرگاه $z=z_0$ برقرار نیست در نتیجه در $z=z_0$ مشتق‌پذیر نیست.

جلسه سوم - (استاد امیری)

فصل 3. توابع مقدماتی

$z = x+iy$

تابع نمایی:

$$e^{z} = \exp(z)$$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$\begin{cases} u = e^{x}\cos y \\ v = e^{x} \cdot \sin y \end{cases}$$

مثال: ثابت کنید $f(z) = e^{\bar{z}}$ در هیچ نقطه مشتق‌پذیر (تحلیلی) نیست.

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\exp(\bar{z}) = e^{x}(\cos y - i\sin y)$$

$$\begin{cases} u = e^{x}\cos y \\ v = -e^{x}\sin y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x} \cdot \cos y \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{x}\cos y$$

مشتق‌پذیر نیست.

C R E معادلات کوشی - ریمان

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

V

Year. Month. Date. ( )

ویژگی‌های تابع نمایی :

1) $\dfrac{d(e^z)}{dz} = e^z$

2) $\exp(z_1)\cdot\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2)$

3) $\dfrac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1 - z_2)$

4) $\left(\exp(z_1)\right)^{-1} = \dfrac{1}{\exp(z_1)}$

5) $\exp(z+2\pi i) = \exp(z)$

مثال . مقدار روبرو را بیابید .

$e^{i\pi} = ?\quad \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$$\boxed{\text{فرمول اویلر} \rightarrow e^{\mp i\theta} = \cos\theta \mp i\sin\theta}$$

مثال ۱ معادله زیر را حل کنید .

$e^z = -4 \quad (z = x+iy)$

$e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{\text{Re حقیقی}} + \underbrace{i\,e^x\sin y}_{\text{Im موهومی}}$ $\quad (i=\sqrt{-1})$

$\underbrace{e^x\cos y}_{Re} + i\,\underbrace{e^x\sin y}_{Im} = \underbrace{-4}_{Re} + \underbrace{i\,0}_{Im}$

$e^x = -4 \xrightarrow{Ln} Ln\,e^x = Ln\,-4 \Rightarrow x\,\cancel{Ln\,e} = Ln\,-4$

$\boxed{x = Ln\,-4}$

$\begin{cases} e^x\cos y = -4 \quad \cancel{\cos y = -4} \\ i\,e^x\sin y = 0 \quad \cancel{e^x = 0} \end{cases}$

$\sin y = 0 \Rightarrow y = \pm k\pi \quad k = 0,1,2,\dots$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

$z = x + iy = 2n - 4 + ik\bar{\pi}$

[illegible]

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z \end{cases}$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (1)$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin z \Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2 \quad (3) \\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2 \quad (4) \end{cases}$$

یادآوری.

$$\begin{cases} \sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad (5) \\ \cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad (6) \end{cases}$$

$$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + i\cos x \cdot \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y - i\sin x \cdot \sinh y$$

نتیجه ی ۵ و ۶

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

مثال: معادله‌ی روبرو را حل کنید:

$\sin z = 16 \qquad (z = x + iy)$

$\sin z = \sin x . \cosh y + i\cos x . \sinh y = 16$

$$\begin{cases} \sin x . \cosh y = 16 & \begin{cases} \cancel{\sin x = 16} \\ \cosh y = 16 \rightarrow y = \cosh^{-1} 16 \end{cases} \\ i\cos x . \sinh y = i0 & \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \cancel{\sinh y = 0} \end{cases} \end{cases}$$

$z = x + iy = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\cosh^{-1} 16$

عکس تابع e^z: (تابع Ln عکس e^z است.)

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z| e^{i\theta} = |z| * e^{i \arg z}$

از ۰ تا 2π — از $-\pi$ تا π

$\theta = \arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$

$e^{\omega} = e^{u} . e^{iv} = e^{u+iv} = |z| e^{i\theta}$

$$\begin{cases} e^{u} = |z| \rightarrow u = \ln|z| \\ e^{iv} = e^{i\theta} \Rightarrow v = \theta = \arg z \end{cases}$$

$\rightarrow \omega = u + iv = \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$

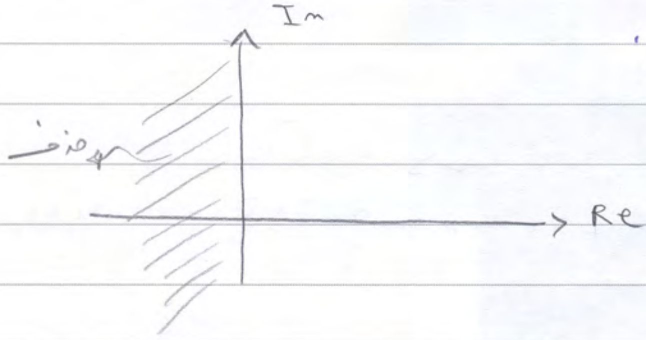
$- \ln(z) = \ln|z| + i\theta$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

مثال ۱. بزرگترین دامنه تحلیلی از تابع $F(z)=Ln(z-(3+4i))$ را بیابید و $F(0)$ را محاسبه کنید.



$$\begin{cases} Im = 0 \\ Re \leq 0 \end{cases}$$

این نقطه‌ها از دامنه Ln حذف شوند.

← که بزرگترین شاخه اصلی

$$F(z) = Ln(x+iy-3-4i) = Ln\big(\underbrace{(x-3)}_{Re} + i\underbrace{(y-4)}_{Im}\big)$$

$$\begin{cases} y-4=0 \rightarrow y=4 \\ x-3 \leq 0 \rightarrow x \leq 3 \end{cases} \rightarrow$$ این نقطه‌ها حذف شوند.

$R(Re) \rightarrow R-(x \leq 3)$

$R(Im) \rightarrow R-(y=4)$

$$f(0) = Ln(0-3-4i) = Ln(\overbrace{-3-4i}^{z}) = Ln|z| + i\theta$$

$$|z| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-4}{-3} = -2.214^{\circ}$$

$$f(0) = Ln5 - i2.214$$

http://www.ab-rafiee.com

توجه خاص: اگر $z \neq 0$ (تابع مختلط) و c یک عدد مختلط باشد.

مختلط

$$Z^c = e^{\ln z^c} = e^{c\ln z} = e^{c(\ln|z|+i\theta)}$$

$$= \exp\left[c(\ln|z|+i\theta)\right]$$

$$e^{\ln z} = z$$

نکته

مثال، مقدار i^i را بدست آورید.

$$i^i = e^{\ln i^i} = e^{i\ln i} = e^{i(\ln|i|+i\theta)} = \exp\left(i(\ln|i|+i\theta)\right)$$

$$|i| = |0+1i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \boxed{\frac{\pi}{2} = \theta}$$

$$e^{i(\cancel{\ln 1}+\frac{\pi i}{2})} = e^{-\pi/2} \Rightarrow \boxed{i^i = e^{-\pi/2}}$$

توابع هذلولوی (هیپربولیک)

$$\sinh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

1) $\sinh z = \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$

2) $\cosh z = \dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$

3) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

4) $(\sinh z)' = \cosh z$

5) $(\cosh z)' = \sinh z$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

+ در روابط هایپربولیک نیز مانند روابط مثلثاتی خود هستند به جای $z \to iz$ می‌شود.

(6) $\sinh iz = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sinh iz = i\sin z \to \sinh z = i\sin iz$

(7) $\cosh iz = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz = \cos z \to \cosh z = \cos iz$

(8) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 . \cosh z_2 \pm \sinh z_2 . \cosh z_1$

(9) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 . \cosh z_2 \pm \sinh z_1 . \sinh z_2$

(10) $\sinh z = \sinh(x + iy)$

$= \sinh x . \underbrace{\cosh iy}_{} + \underbrace{\sinh iy}_{} . \cosh x$

$= \sinh x . \cos y + i\sin y . \cosh x$

(11) $\left(\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}\right)' = \operatorname{sech}^2 z$

(12) $\left(\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}\right)' = -\operatorname{csch}^2 z$

(13) $\left(\operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}\right)' = \operatorname{sech} z . \tanh z$

(14) $\left(\operatorname{csch} z = \dfrac{1}{\sinh z}\right)' = -\operatorname{csch} z . \operatorname{cotgh} z$

نکته:

(1) $\left\{\begin{array}{l} \overline{\tanh z} \\ \coth z \end{array}\right. \to T = \pi i$

(2) $\left\{\begin{array}{l} \sinh z \\ \cosh z \end{array}\right. \to T = 2\pi i$

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

توابع مثلثاتی و هذلولوی وارون :

① $\omega = \cos^{-1} z \xrightarrow{\cos} \cos \omega = z$

$$\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = z \Rightarrow \frac{e^{2i\omega} + 1}{2e^{i\omega}} = z$$

$$\rightarrow e^{2i\omega} + 1 = 2z e^{i\omega} \qquad (\text{فرض } e^{i\omega} = x)$$

$$x^2 - 2zx + 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4z^2 - 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} e^{i\omega}_1 = \dfrac{2z - \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z - \sqrt{z^2 - 1} \\ e^{i\omega}_2 = \dfrac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1} \end{cases}$$

$$e^{i\omega} = z \pm \sqrt{z^2 - 1} \rightarrow Ln\, e^{i\omega} = Ln \left| z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right|$$

$$i\omega = Ln \left| z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right| \Rightarrow \omega = \frac{1}{i} \left(Ln \left| z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right| \right)$$

(هیچ وقت نباید در مخرج i باشد، باید ضرب در i کنیم.)

$$\omega = -i\, Ln \left| z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right|$$

② $\omega = \sin^{-1} z = -i\, Ln \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right)$

③ $\omega = \tan^{-1} z = \frac{i}{2} Ln \left| \frac{1 - iz}{1 + iz} \right|$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

(4) $\omega = \sinh^{-1} z = \cosh^{-1} z = Ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$

(5) $\omega = \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

نگاشت خطی:

نگاشت بوسیله توابع مقدماتی:

نوع ۱. $\omega = az + b$

(1) if $a = 1 \rightarrow \omega = z + b$ نگاشت انتقال

(2) if $b = 0 \rightarrow \omega = az$ نگاشت همانی (تغییر حال است فقط انتقال اتفاق می‌افتد.)

if $a > 1 \rightarrow$ انبساط

if $0 < a < 1 \rightarrow$ انقباض

(3) if $a = c$ (مختلط) $\rightarrow$ دوران

مثال ۱) تصویر ناحیه مستطیلی محدود به $\begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

را تحت نگاشت $\omega = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} z + 1 + 2i$ بیابید.

$\omega = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(x+iy) + 1 + 2i$

$\omega = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)(x+iy) + 1 + 2i$

$(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\omega = (1+i)(x+iy)+1+2i$$

$$\omega = x+iy+ix-y+1+2i$$

$$\omega = (x-y+1)+i(x+y+2) = u+iv$$

$$\begin{cases} u = x-y+1 \\ v = x+y+2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x-y = u-1 \\ x+y = v-2 \end{cases}$$

$$2x = u+v-3 \implies x = \frac{u+v-3}{2}, \quad y = \frac{v-u+1}{2}$$

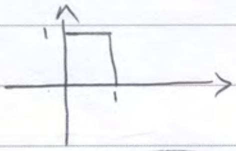
$$\begin{cases} u+v = 3 \\ u+v = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} v-u = -1 \\ v-u = 3 \end{cases}$$

نگاشت ۲ تابع $\omega = e^z$

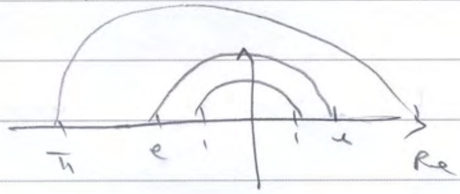
$$\underbrace{\omega}_{Re^{i\phi}} = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \rightarrow \begin{cases} R \to e^x \\ \phi = y \end{cases}$$

مثال: تصویر ناحیه مستطیل شکل $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$ را تحت نگاشت $\omega = e^z$ بیابید.

$$R = e^x \begin{cases} x=0 \to R=1 \\ x=1 \to R=1 \end{cases}$$



$$\phi = y \begin{cases} y=0 \to \phi=0 \\ y=\pi \to \phi=\pi \end{cases}$$



BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

نگاشت 3. تابع $\omega = Ln\, z$

$$\omega = Ln\, z = Ln|z| + i\theta = u + iv$$

$$\begin{cases} u = Ln\,|z| \\ i\theta = iv \Rightarrow \theta = v = 2k\pi + \theta \end{cases}$$

نگاشت 4. $\omega = z^{n}$

$$Re^{i\phi} = \left(re^{i\theta}\right)^{n}$$

$$\begin{cases} R = r^{n} \\ \phi = n\theta \end{cases}$$

نگاشت 5. $\omega = \frac{1}{z}$

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} \Rightarrow \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$$

$$\begin{cases} R = \frac{1}{r} \\ \phi = -\theta \end{cases}$$

http://www.ab-rafiee.com

جلسه سوم (استاد محمدخان) ادامه فصل دوم

شرط کوشی ریمان در مختصات قطبی :

$$\begin{cases} f(z) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

شرط کوشی ریمان در مختصات قطبی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

تعریف ۳: تابع f در نقطه z_0 تحلیلی نامیده می‌شود اگر در z_0 و همسایگی آن مشتق‌پذیر باشد.

تعریف: اگر f در z_0 تحلیلی نباشد ولی در هر همسایگی از نقاط همسایگی‌اش تحلیلی باشد آنگاه z_0 نقطه تکین تابع نامیده می‌شود.

1) $f(z) = \frac{1}{z}$ → این تابع در $z=0$ دارای نقطه تکین است.

در توابع کسری ریشه‌های مخرج به شرط آن که صورت را صفر نکنند نقطه تکین می‌باشند (توابع جبری)

در توابع مختلط کسری برای بدست آوردن نقاط تکین تنها کافی است ریشه‌های مخرج را حساب کنید.

مثال: نقاط تکین تابع زیر را بدست آورید؟

$$f(z) = \frac{iz}{z(1+z^2)}$$

جواب → $z=0 \;,\; z=\pm i$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

تعریف: تابع تام f تابعی می‌شود که در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد.

نکته. توابع چندجمله‌ای‌ها تام می‌باشند.

نکته. تابع $f(z)=e^{z}$ بنا به تعریف تابع تام است.

نکته. تابع $f(z)=e^{\bar z}$ تام نیست.

تعریف تابع همساز: در تابع $f(z)=u+iv$ ، u,v را مزدوج همساز گوئیم اگر در شرایط زیر صدق کنند.

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ ② \ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

v مزدوج همساز u است.

مثال مهم ۱: نشان دهید تابع زیر یک تابع همساز است و تابع مزدوج همساز آن را بدست آورید.

$$u=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy+4x \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6y+4 \quad (a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2-4y \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6y-4 \quad (b)$$

$(a)+(b)=0 \rightarrow$ u یک تابع همساز است.

ادامه

http://www.ab-rafiee.com

نکته مهم. هر تابع هموساز در شرایط کوشی ـ ریمان نیز صدق می‌کند.

می‌دانیم : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6xy + 4x$

از طرفی شرط کوشی ـ ریمان نیز صدق می‌کند $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

فقط تابعی از x نه y است.

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 6xy + 4x \xrightarrow[\text{نسبت به } y]{\text{انتگرال}} v = 3xy^2 + 4xy + \cancel{c} \to g(x)$$

از طرفی

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 + 4y + g'(x) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow 3y^2 + 4y + g'(x) = -\left(3x^2 - 3y^2 - 4y\right)$$

$$\cancel{3y^2} + \cancel{4y} + g'(x) = \cancel{3y^2} + \cancel{4y} - 3x^2$$

$$g'(x) = -3x^2 \longrightarrow g(x) = -x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 3xy^2 + 4xy - x^3}$$

نکته مهم. ① اگر v مزدوج هموساز u و u مزدوج هموساز v باشد در این صورت u و v ثابت هستند.

② شرط هموساز بودن در مختصات قطبی : (احتمالش کم است سؤال بیاید.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

نکته تستی. اگر u و v همساز باشند آنگاه تابع زیر تحلیلی است.

(احتمالاً تست)

$$\omega = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

نکته تستی. تفاضل، ضرب و ترکیب دو تابع تام، تام است ولی تقسیم دو تابع تام

لزوماً تام نیست.

نکته تستی. مجموعه زیر نه باز است و نه بسته. مهم

$$\begin{cases} 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \\ |z| < 0 \end{cases}$$

نکته. تابع $f(z)=\bar{z}$ تحلیلی نیست ولی پیوسته هست.

نکته. تابع $f(z)=\arg z$ در جهت منفی محور اعداد حقیقی حد ندارد.

نکته. $f(z)=\bar{z}.\bar{z}$ فقط در $z=0$ مشتق‌پذیر است.

نکته تستی. تابع روبرو $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$ در $z=0$ مشتق‌پذیر است.

قسمت حقیقی

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

تست های فصل دوم.

۱- کدام گزینه غلط است؟

(1) $f(z)=\arg z$ روی محور منفی اعداد حقیقی مشتق ندارد. (2) $f(z)=\exp(\bar{z})$ مشتق‌پذیر نیست.

(3) $f(z)=\bar{z}$ مشتق‌پذیر نیست. (4) $f(z)=z|z|$ در $z=0$ مشتق‌پذیر است.

گزینه ۴.

2- کدام یک از توابع زیر تام است؟

(1) $f(z)=Re(z)$

(2) $f(z)=z^4$ (3) $f(z)=\frac{1}{z}$ (4) $f(z)=|z|^2$

گزینه 2 چون چندجمله‌ای است.

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

فصل سوم.

توابع غیر جبری مختلط.

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ ← تعریف تابع نمایی

$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ ← فرمول اویلر

نکته مهم. تابع e^z تحلیلی، تام و با دوره‌ی تناوب $2\pi i$ است.

نکته. تابع $e^{\bar z}$ تحلیلی نیست.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$e^z = -4$

$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + i\sin y\, e^x$ $\qquad e^x = 4 \to x = \ln 4$

$e^x = -4$ غ ق ق

$$\begin{cases} e^x\cos y = -4 \to e^x(\pm 1) = -4 \begin{cases} e^x = -4 \\ -e^x = -4 \to y = \cancel{0}, \pm\pi, \pm 3\pi, \dots \end{cases} \\ e^x\, i\sin y = 0 \begin{cases} e^x = 0 \to x = -\infty \\ \sin y = 0 \to y = k\pi \end{cases} \end{cases}$$

غ ق ق ← چون در توابع نمایی منفی تعریف نمی‌شود.

نکته مهم. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\qquad \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

نکته مهم. نتیجه: $\sin z$ و $\cos z$ تحلیلی هستند زیرا e^{iz} تحلیلی است. ولی کران‌دار نیستند.

نکته. $\cos\bar z$ تحلیلی نیست ولی $\sin\bar z$ تحلیلی است.

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

نکته. $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\qquad \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

نتیجه. $\sinh z$ و $\cosh z$ هر دو تحلیلی‌اند و دوره‌ی تناوب هر دو $2\pi i$ هست.

نکته. دوره‌ی تناوب $\tgh z$ و $\cotgh z$ برابر است با πi.

تعریف مهم:

$$\begin{cases} \sinh z = \sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \cdot \sinh y \\ \cosh z = \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sinh y \end{cases}$$

مثال، قسمت موهومی تابع $\sinh z$ را بدست آورید.

$\cosh x \cdot \sinh y \leftarrow$ موهومی

نکته‌ی مهم:

$$\begin{cases} \sin z = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y \\ \cos z = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y \end{cases}$$

مثال، معادله زیر را حل کنید.

$\sin z = 16$

$\sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y = 16$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cosh y = 16 \longrightarrow \pm \cosh y = 16 \\ \cos x \cdot \sinh y = 0 \end{cases}$$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مطلوب

$\sinh y = 0$

http://www.ab-rafiee.com

$$\sinh y=0 \rightarrow \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=0 \rightarrow e^{y}=e^{-y} \rightarrow y=-y \rightarrow y=0$$

اگر $y=0$ در $\cosh y=16$ صدق نخواهد کرد — $x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ، $y=0$ جواب است

ولی اگر صدق کرد نقطه جواب $x=k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ است.

نکته مهم: توابع $\operatorname{tg} z$ و $\sec z$ در همه نقاط بجز $\left\{ k\pi+\frac{\pi}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots \right.$ تحلیلی است.

در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ نقاط تکین توابع $\operatorname{tg} z$ و $\sec z$ می‌باشند.

پیدا کردن مقدار اصلی یک تابع مختلط: مورد سوال است.

$$\operatorname{Ln} z=\operatorname{Ln}|z|+i\theta \quad (-\pi<\theta<\pi)$$

در فرمول فوق اگر برای محاسبه θ، k را صفر قرار دهیم مقدار $\operatorname{Ln} z$ مقدار اصلی نامیده می‌شود.

مثال ۱) مقدار اصلی i^i را حساب کنید.

$$i^{i}=e^{i\operatorname{Ln} i}=e^{i(\operatorname{Ln}|i|+i\theta)}=e^{i(\operatorname{Ln}1+i\theta)}=e^{i^{2}\theta}=e^{-\theta}$$

$$\theta=\arctan\frac{y}{x} \rightarrow \theta=\arctan\infty \rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$e^{-\theta}=e^{-(2k\pi+\frac{\pi}{2})}=e^{-\pi/2}$$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

طلب جلسه ۴ .

فصل چهارم

انتگرال گیری در صفحه مختلط

$$z = \varphi(t) + i\psi(t) \qquad a<t<b$$

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t)+\psi(t))(\varphi'(t)+i\psi'(t))\,dt$$

مثال، انتگرال $f(z)=x^2+iy^3$ را روی مسیرهای زیر بیابید:

حالت اول، C مسیر خط $y=x$ از مبدأ تا نقطه $(1,1)$ باشد. $\int f(z)\,dz =$

حالت دوم، C مسیر منحنی خط $y=x^2$ از مبدأ تا نقطه $(3,2)$ باشد.

حالت سوم، C از مبدأ به $B(1,0)$ و سپس روی خط $x=1$ به نقطه $A(1,1)$ باشد.

$y=x$

حل ۱) حالت اول

تغییر متغیر

$x=t \to y=t \Rightarrow dx=dy=dt$

$\{0\le t\le 1 \to a<t<b\}$

$$\int_0^1 f(z)\,dz = \int_0^1 (x^2+iy^3)(dx+i\,dy)$$

$$=\int_0^1 (t^2+it^3)(dt+i\,dt) = \int_0^1 (t^2+it^3)(1+i)\,dt$$

$$=\int_0^1 (t^2+it^2+it^3-t^3)\,dt = \frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}it^3+\frac{1}{4}it^4-\cancel{\frac{1}{4}t^4}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{i7}{12}$$

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

حالت دوم / $x=t \rightarrow y=t^2$

$$\begin{cases} dx=dt \\ dy=2t\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<t<b \\ 0<t<3 \end{cases}$$

$$\int_0^3 (x^2+iy^3)(dx+i\,dy) = \int_0^3 (t^2+it^6)(dt+i2t\,dt)$$

$$= \int_0^3 (t^2+it^6)(1+2ti)\,dt = \int_0^3 \left(t^2+2t^3i+it^6-2t^7\right)dt$$

$$= \cdots$$

حالت سوم / $\begin{cases} x=t \rightarrow dx=dt \\ y=0 \rightarrow dy=0 \end{cases}$ $\qquad x=1 \rightarrow dx=0$

$$\int_0^1 (x^2+i\overset{0}{y^3})(dx+i\overset{0}{dy}) + \int (x^2+iy^3)(\overset{0}{dx}+i\,dy)$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \underline{\int_0^1 (1+iy^3)(i\,dy)}$$

چون انتگرال برحسب y است پس حدها نیز باید برحسب y باشند

پس حدود انتگرال را بصورت حالت y می‌نویسیم: $a<y<b$.

$$= \cdots$$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

[illegible]

Year. Month. Date. ( )

نکته. کار انجام شده توسط نیروی $F=ui+vj$ در مسیر c برابر است با $\mathrm{Re}\int_c \bar{f}(z)\,dz$

که در آن $\bar{f}(z)=u-iv$ که $f(z)=u+iv$ است.

مثال. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}=\underbrace{(x+y^2)}_{u}\vec{i}+\underbrace{x^3}_{v}\vec{j}$ در مسیر مستقیم از $(0,0)$ تا $(1,2)$ را بیابید.

حل. $f(z)=x+y^2+ix^3$ معادله خط ←

$\bar{f}(z)=x+y^2-ix^3$ $(y-y_0)+(x-x_0)=0$

$y=2x$

$$\int_c \bar{f}(z)\,dz=\int_0^1 (x+y^2-ix^3)(dx+i\,dy)= \longrightarrow 2$$

$$=\int_0^1 (x+4x^2-ix^3)(dx+2i\,dx)=\dots$$

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \text{"} = ?$$

نکته. چون می‌خواهیم Real ها را بدست آوریم می‌توانیم انتگرال i دار را حساب نکنیم.

قضیه گرین ←

$$\oint_c P(z,\bar{z})\,dz+Q(z,\bar{z})\,d\bar{z}=2i\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dx\,dy$$

http://www.ab-rafiee.com

قضیه کوشی ← اگر تابع $f(z)$ در ناحیه D درون و مرز آن (c) تحلیلی باشد (۱) و مشتق آن $f'(z)$ روی مرز پیوسته باشد (۲) آنگاه انتگرال $f(z)$ روی مسیر c برابر صفر است. $\oint_c f(z)\,dz=0$

قضیه کوشی - گورسا ← اگر تابع $f(z)$ درون و روی مرز D تحلیلی باشد آنگاه

$$\int_c f(z)\,dz=0$$

مثال ۱ →

$$\oint_c \frac{e^z}{\cos z}\,dz=?$$

$c:|z|=1$ روی مسیر

یک دایره

← تابع صورت و مخرج درون و روی دایره $|z|=1$ تحلیلی است چون ریشه‌های مخرج نقاط $\frac{\pm\pi}{2}$ که جزء نقاط تکین تابع هستند در خارج از دایره‌اند پس درون و روی دایره $|z|=1$ تحلیلی است و انتگرال برابر صفر است.

مثال ۲ →

$$\oint e^{z^2}\,dz=?$$

$c:|z|=2$ روی مسیر

یک دایره

← چون e^{z^2} درون و روی دایره $|z|=1$ تحلیلی است پس بنابر قضیه کوشی گورسا انتگرال آن برابر صفر است.

http://www.ab-rafiee.com

تعریف ناحیه همبند ساده ←

ناحیه‌ی D روی ورق همبند ساده نامیده می‌شود هرگاه بتوان هر منحنی بسته در آن را کوچک نمود بدون آن که ناحیه‌ی D را ترک کند در غیر این صورت ناحیه همبند چندگانه نامیده می‌شود.

$$\int_c (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

نکته‌ی مهم.

(اگر اثبات این رابطه را خواستید)

نکته ← اگر تابع $f(z)$ درون ناحیه D و روی مرز آن تحلیلی باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{z-z_0} = f(z_0)$$

نقطه‌ی z_0 درون ناحیه است.

مثال ۱ → $\begin{cases} \oint_c \dfrac{dz}{z^3-z^2} = ? \\ |z| = \frac{1}{2} \end{cases}$

دارای دو نقطه‌ی تکین است $\begin{cases} z=0 \\ z=1 \end{cases}$

و نقطه‌ی $z=0$ داخل ناحیه قرار دارد.

$$\oint_c \frac{dz}{z(1-z)} = \oint \frac{dz}{-z(z-1)}$$

$\to f:$ این تابع همه جا تحلیلی است.

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} \to f(0) = 1$$

$$\Rightarrow 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i\, f(0) = \boxed{2\pi i}$$

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

۲ مثال ←

$$\begin{cases} \oint \dfrac{\cosh z\,dz}{z^2-2z} = ? \\ |z| = 1 \end{cases}$$

$z^2-2z \rightarrow z(z-2)=0 \begin{cases} z=0 \\ z=0 \end{cases}$ تکین

$$\int \frac{\cosh z\,dz}{z(z-2)}$$

$$f(z) = \frac{\cosh z\,dz}{z-2}$$

$$f(0) = \frac{\cosh 0}{0-2} = \frac{-1}{2}$$

$$\rightarrow 2\pi i \times \frac{-1}{2} = -\pi i$$

۳ مثال ←

$$\begin{cases} \oint_c \dfrac{z^2+z-1}{z^2-3z}\,dz = ? \\ |z| = 1 \end{cases}$$

$z^2-3z \rightarrow z(z-3)=0 \begin{cases} z=0 \\ z=3 \end{cases}$ تکین

$$\int \frac{z^2+z-1}{z(z-3)}\,dz = ?$$

$$f(z) = \frac{z^2+z-1}{z-3} \Rightarrow 2\pi i f(z_0) = \frac{2}{3}\pi i$$

$$f(0) = \frac{1}{3}$$

نکته ← مشتق توان از طریق رمل :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

۱) مثال →

$$\oint \frac{e^z dz}{(z-3)(z+1)^2} \qquad z = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$|z| = \frac{1}{2} \rightarrow$ جواب $= 0$

$|z| = 3/2 \rightarrow z = -1$ درون ناحیه است $\rightarrow$ دارای نقطه تکین است

$f(z) = \frac{e^z}{z-3} \rightarrow f(-1) = \quad \Rightarrow \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = ?$

$n = 1$

$= 2\pi i \times \frac{-5e^{-1}}{16}$

$|z| = 7/2 \rightarrow$ هر دو نقطه درون ناحیه است $\rightarrow$ ″

حل

$$\int \frac{e^z \, dz}{(z-3)(z+1)^2} + \int \frac{e^z \, dz}{(z-3)(z+1)^2}$$

تابع از نقطه تکین تشکیل می‌شود به $z=3$ در آن تکین است (1).

تابع از دو قسمت تشکیل می‌شود $z=-1$ درون ناحیه است (2).

$$= \int \frac{\overbrace{e^z}^{f_{(2)}}}{(z+1)^2 (z-3)} + \int \frac{\overbrace{e^z}^{f_{(1)}}}{(z-3)(z+1)^2}$$

$$= 2\pi i \, f_{(2)}(3) + \frac{2\pi i}{1!} f'_{(1)}(-1)$$

$= \dots$

حل $\rightarrow$ $\begin{cases} \oint \dfrac{z^6+1}{z^2(z+1)}\,dz \\ |z| = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0 \\ z=-1 \end{cases}$ $\rightarrow$ هر دو نقطه در ناحیه است.

$$\int \frac{\overbrace{z^6+1}^{f_1}}{z^2(z+1)} + \int \frac{\overbrace{z^6+1}^{f_2}}{z^2(z+1)}$$

$z=0$ در تابع باشد و $z=-1$ در ناحیه نباشد

$z=0$ در تابع نباشد و $z=-1$ در ناحیه باشد

$$= \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0) + 2\pi i f_2(-1)$$

✓

http://www.ab-rafiee.com

جلسه نهم .

قضیه موارا :

اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D پیوسته باشد و برای هر مرز c در D داشته باشیم $\oint f(z)dz = 0$ آنگاه $f(z)$ در D تحلیلی است .

نکته تستی : قضیه موارا عکس قضیه ی کوشی گورسا است .

قضیه نامساوی کوشی ← $$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

که کاربرد آن جهت

[illegible] است .

① r شعاع دایره به مرکز z_0 است .

② $|f(z_0)| \leq M$

قضیه لیوویل ← اگر $f(z)$ تحلیلی و $|f(z)| \leq M$ آنگاه $f(z)$ تابع ثابت است .

نکته . هر چند جمله ای مختلط درجه n دقیقاً n ریشه دارد .

نکته تستی . نکته بالا نتیجه ای از قضیه ی لیوویل است .

قضیه مقدار میانگین گوس ←

اگر تابع $f(z)$ روی مرز دایره c به شعاع r و به مرکز a تحلیلی باشد

آنگاه $f(a)$ مقدار متوسط مقادیر $\frac{f(z)}{c}$ بوده و داریم :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

$f(a)$ بیانگر این حجم است .

مثال ۸. انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right) d\theta = ?$$

$a=\frac{\pi}{6}$

$r=2$

$f(z)=\cos^2 z$

$$\rightarrow \int \text{—} = 2\pi f(a) = 2\pi f(\pi/6) = 2\pi \cos^2(\tfrac{\pi}{6}) = \frac{3\pi}{2}$$

فصل پنجم

نکته: دنباله‌ی مختلط $z_n=u_n+iv_n$ در صورتی همگرا است که u_n و v_n هر دو همگرا باشند.

نکته ۲. شرایط همگرایی سری‌های مختلط نیز همانند سری‌های حقیقی بوده و از آزمون‌های معتبر در آن در مبحث مختلط نیز می‌توان استفاده نمود. (آزمون نسبت، ریشه، مقایسه)

آزمون وایرشتراس ←

اگر $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ یک سری با جملات مثبت و همگرا باشد آنگاه $\sum f_k(z)$ همگرای یکنواخت در ناحیه R می‌باشد در صورتی که $|f_k(z)| \le M_k$.

آزمون رابه ← اگر $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)=L$ باشد آنگاه $\sum f_n(z)$ در صورتی که $L>1$ باشد همگرا است و در صورتی که $L<1$ باشد واگرا است.

← این آزمون تقریباً برعکس آزمون نسبت است.

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

www.AB-RAFIEE.com

Year. Month. Date. ( )

قضیه تیلور

اگر تابع $f(z)$ در همسایگی $z=z_0$ تحلیلی باشد آنگاه داریم:

$$\begin{cases} F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\ a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}} \end{cases}$$

از سری لوران

از طرفی چون داریم

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}$$

پس

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

سری تیلور

مثال ، تابع زیر را حول $\frac{\pi}{2}$ بسط تیلور دهید.

$$f(z)=\cos z$$

$$\begin{cases} f'=-\sin z \\ f''=-\cos z \\ f'''=\sin z \\ f''''=\cos z \end{cases}$$

$$f(z)=\frac{f(\pi/2)}{0!}+\frac{f'(\pi/2)}{1!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{f''(\pi/2)}{2!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2+\dots$$

$= \dots$

http://www.ab-rafiee.com

(در همسایگی $z=z_0$)

نکته: سری تیلور یک تابع مختلط وقتی مناسب است که در آن تابع تحلیلی باشد، درصورتیکه هر تابع در همسایگی $z=z_0$ تحلیلی نباشد بهتر است از سری لوران که حالت عمومی‌تر سری تیلور است استفاده کنیم.

الف) سری لوران —حالت خاصی از→ سری تیلور —حالت خاصی از→ لوران

(حالت خاص سری تیلور است در نقطه $z=0$)

سری لوران ←

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c \dfrac{f(t)\,dt}{(z-z_0)^{n+1}} \\[2ex] b_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_c \dfrac{f(t)\,dt}{(z-z_0)^{1-n}} \end{cases}$$

(سوال اصلی امتحان)

تعریف: ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ (یعنی همان b_1) مانده تابع $f(z)$ در $z=z_0$ نامیده می‌شود و می‌نویسیم:

$$\operatorname{Res}_{z_0}=b_1 \quad \text{یا} \quad \operatorname{Res}_{z\to z_0}(f(z))=b_1$$

تعریف ۱. فرض کنیم $f(z)$ تحلیلی و دارای صفری از مرتبه m باشد.

اگر $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ و اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد

($g(z)$ تحلیلی است و مخالف صفر است.)

آن گاه $z=z_0$ را نقطه تکین تابع می‌نامیم.

اگر تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد ولی در همسایگی z_0 تحلیلی باشد آن گاه $z=z_0$ را نقطه تکین تنها تابع گوییم. (در نقطه تکین تنها تابع دارای سری لوران می‌باشد.)

نکته ۱: اگر یک تابع در یک نقطه تکین تنها سری لوران داشته باشد آن سری از دو بخش a_n و b_n تشکیل شده است. قسمت دوم (b_n) بخش اصلی سری نامیده می‌شود.

نکته ۲. اگر بخش اصلی یک سری لوران صفر باشد، نقطه تکین تنها، نقطه برداشتنی نامیده می‌شود.

نکته ۳. اگر بخش اصلی سری لوران از تعداد متناهی جمله تشکیل شده باشد آن گاه نقطه تکین را قطب می‌نامیم.

متناهی

$m=1$: قطب ساده

قطب مرتبه m (m تعداد جملات بخش اصلی)

$m\neq 1$: قطب مرتبه m

نکته ۴. اگر بخش اصلی سری لوران دارای تعداد نامتناهی جمله باشد آن گاه نقطه تکین اساسی نامیده می‌شود.

http://www.ab-rafiee.com

(سؤالات پرسش شده در امتحان از این ۲ نکته است)

نکته مهم : روش بدست آوردن مانده :

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) \qquad ①$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{1-n}} \qquad ②$$

برای بدست آوردن مانده‌ی یک تابع در نقطه $z=z_0$ اگر نقطه تکین اساسی باشد از فرمول ② استفاده می‌کنیم اگر نقطه قطب باشد از فرمول ① استفاده می‌کنیم اگر نقطه برداشتنی باشد آنگاه مانده صفر است .

حالت خاص ← برای قطب ساده می‌توان فرمول مانده را بصورت زیر ساده نمود (فرمول ①)

$$b_1 = \lim (z-z_0) f(z)$$

نکته مهم ← اگر نقطه تکین اساسی باشد برای محاسبه‌ی مانده می‌توان بجای استفاده از فرمول ② از بسط مستقیم لوران تابع استفاده نمود .

صفحه ۹۵ کتاب ← (فرمول‌های این صفحه بسط مک لوران بعضی توابع خاص را نشان می‌دهد .)

① $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$

http://www.ab-rafiee.com

مثال ۲ مانده تابع $f(z)=z^2 e^{1/z}$ را در $z=0$ بدست آورید.

حل ۱) نقطه‌ی $z=0$ نقطه‌ی تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌باشد در نتیجه داریم

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

پس:

$$z^2 e^{1/z} = z^2 + \frac{z}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \cdots$$

ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ مانده است پس $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ برابر مانده است.

۲۰

طبسم.

امتحان میان‌ترم.

www.AB-RAFIEE.com

جلسه هفتم :

قضیه مانده‌ها : اگر $f(z)$ داخل و روی مرز c جز در تعداد متناهی نقاط تحلیلی باشد آنگاه :

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i\,(\underbrace{Res}_{\text{مانده}}(z_0) + Res(z_1) + \dots + Res(z_n))$$

مثال ۱ - حاصل انتگرال زیر را بدست آورید.

- هر دو نقطه در داخل مرز ما قرار دارند.

$$\oint_c \frac{z^6+1}{z^2(z+1)}\,dz \qquad |z|=2 \leftarrow c$$

حل
$$\begin{cases} z=0 & \text{قطب مرتبه } 2 \\ z=-1 & \text{قطب ساده} \end{cases}$$

$$Res(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z) =$$

$$\lim \frac{d}{dz}(z-0)^2 \frac{z^6+1}{z^2(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^6+1}{z+1} = -1$$

$$Res(-1) = \lim_{z\to -1} (z-z_0) f(z) =$$

$$\lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z^6+1}{z^2(z+1)} = \lim_{z\to -1} \frac{z^6+1}{z^2} = 2$$

$$\Rightarrow \oint_c f(z) = 2\pi i\,(2-1) = \boxed{2\pi i}$$

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

مثال، مانده زیر را بیابید.

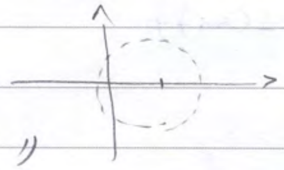
$$\oint \frac{z\,dz}{(z^2-1)^2(z^2+1)}$$

$\boxed{|z-1| = \sqrt{3} \leftarrow c}$ A

۱- در دایره: حل،

$z^2 = 1 \rightarrow z = \pm 1$

$z^2 = -1 \rightarrow z = \pm i$



درداخل و مرز دایره هستند: $\Rightarrow \{ z = 1 , i , -i$

قطب مرتبه 2 — قطب ساده

نکته: اگر هم مرز ناحیه A درست شود باید داخل یا مرز دایره باشد.

به جز ناحیه هم، حق‌وان مجید، ببر آیا این نقاط درداخل یا مرز هستند یا نه.

$-1 \rightarrow 2 \not< \sqrt{3}$ ✗

$+1 \rightarrow 0 < \sqrt{3}$ ✓

$i \rightarrow \underbrace{|i-1|}_{\text{اندازه}} < \sqrt{3}$

$\sqrt{2} < \sqrt{3}$ ✓

$-i \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3}$ ✓

$$\oint \frac{z\,dz}{(z^2-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\left(\text{مانده}(1) + \text{مانده}(i) + \text{مانده}(-i)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \left(-\tfrac{1}{8}\right)\right) = \frac{\pi i}{4}$$

$Res(1) =$ مانده زیر

$(z-i)(z+i)$

$$Res(i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)} = \lim_{z\to i} \frac{z}{(z^2-1)^2(z+i)} = \frac{i}{8i} = \frac{1}{8}$$

$$Res(-i) = \lim_{z\to -i} (z+i)\frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)} = \lim_{z\to -i} \frac{z}{(z^2-1)^2(z-i)} = \frac{-i}{-8i} = \frac{1}{8}$$

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

$$\operatorname{Res}(1) = \lim_{z\to 1} (z-1)\left(\frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}\right) = -\frac{1}{8}$$

مثال ۱

$$\oint_c \frac{(z+2)^2}{4z^3+z}$$

$c \leftarrow |z-1| = 3$

حل، $4z^3+z = z(4z^2+1)=0$

$z=0$

$4z^2+1=0 \to z = \pm \frac{i}{2}$

قطب ساده هر سه در داخل دایره قرار دارند.

نکته. اگر $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 قطب ساده داشته باشد، و $f(z)$ به شکل صورت $\frac{P(z)}{q(z)}$ باشد و $P(z)$ و $q(z)$ در z_0 تحلیلی باشند و $Q'(z)$ در z_0 مخالف صفر باشد (مشتق مخرج) آنگاه مانده در z_0 برابر است با:

$$\operatorname{Res}(z_0) = \lim \frac{P(z)}{Q'(z)}$$

$$\operatorname{Res}(0) = \lim_{z\to 0} \frac{(z+2)^2}{12z^2+1} = 4$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{i}{2}\right) \lim_{z\to \frac{i}{2}} \frac{(z+2)^2}{12z^2+1} = \frac{\left(\frac{i}{2}+2\right)^2}{12\left(\frac{i}{2}\right)^2+1} = \frac{-\frac{1}{4}+4+2i}{-3+1} =$$

$$\operatorname{Res}\left(-\frac{i}{2}\right) = \lim_{z\to -\frac{i}{2}} \frac{(z+2)^2}{12z^2+1} =$$

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

احتمالش کمه است سؤال بیاید.

نکته: در ادامه نکته ی قبل اگر تمام شرایط نکته برقرار بود و فقط قطب قطب دوگانه بود آن گاه داریم:

$$\operatorname{Res}(z_0) = \frac{2}{\left(Q''(z_0)\right)^2}\left(P'(z_0)Q''(z_0) - P(z_0)Q'''(z_0)\right)$$

کمتر سؤال می‌آید.

اهمیت: برای بدست آوردن انتگرال‌های به فرم زیر از تغییر متغیر زیر استفاده می‌شود

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{R}_{\text{تابع کسری}}(\cos\theta, \sin\theta) \longleftarrow \text{فرم انتگرال}$$

حتما باید این فاصله باشد.

تغییر متغیر

$$\longrightarrow \begin{cases} \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + z^{-n}\right) \\ \sin n\theta = \frac{1}{2i}\left(z^n - z^{-n}\right) \\ d\theta = \frac{dz}{iz} \\ z = e^{i\theta} \end{cases}$$

و با تبدیل انتگرال به انتگرال تابع کسری از قضیه مانده ها استفاده می‌شود و

جواب را بدست می‌آوریم.

مثال ۱: محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 12\cos\theta} = ?$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ d\theta = \frac{dz}{iz} \end{cases}$$

۲۵/ Year. Month. Date. ( ) (یکی از دو سؤال زیر صد در صد درست حل شده است.) ← جواب‌های اشتباه را حذف کنید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{iz(13+6(z+\frac{1}{z}))} = \oint \frac{dz}{13iz+6iz(z+\frac{1}{z})} = \oint \frac{dz}{13iz+6iz^2+6i}$$

$$= \frac{1}{i}\oint \frac{dz}{13z+6z^2+6} \Rightarrow \frac{1}{i}\oint \frac{dz}{(3z+2)(2z+3)}$$ ✓

$$\begin{cases} z=-2/3 \\ z=-3/2 \times \end{cases}$$ در مورد نیست ... ادامه حل مثل سابق

$$\frac{1}{i}(2\pi i)(\mathrm{Res}(-2/3)) = \frac{6\pi}{5}$$

مثال، محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{5-4\cos\theta} = \pi/8$$ ابتدا تغییر متغیر $\theta = 2\pi - \theta$ شرایط را اعمال می‌کنیم

تا انتگرال در بازه $(0, 2\pi)$ حاصل گردد.

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}) \\ \cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \\ d\theta = \frac{dz}{iz} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)^2}{5-4(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))} \times \frac{dz}{iz} \Rightarrow$$

دارای تقارن زوج است

$\int_0^{\pi}$

http://www.ab-rafiee.com

WWW.AB-RAFIEE.com

Year. Month. Date. ( )

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{-\frac{1}{4}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)^2}{5iz-2iz\left(\frac{z^2+1}{z}\right)}\,dz \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{8i}\int_0^{2\pi}\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left(5z-2z\left(\frac{z+1}{2}\right)\right)} = -\frac{1}{8i}\int\frac{(z^2-1)^2}{z^2(5z-2z-2)}\,dz$$

ادامه حل مثال قبل.

تعریف. مقدار اصلی کوشی :

$$\text{c.p.v}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

نکته. همه انتگرال های زیر را حفظ کنید.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x-1}\,dx = -\pi\sin 1$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x-1}\,dx = \pi\cos 1$

3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{\pi}{e}\sin 1$

http://www.ab-rafiee.com

حل تمرین ۵۵

فصل ششم ← فصل سؤالات تستی

نگاشت های همدیس و کاربرد آن ها :

- تعریف نگاشت همدیس ← اگر $f(z)$ در ناحیه‌ی نقاط D تحلیلی باشد و به‌ازای همه‌ی نقاط داخل D داشته باشیم $f'(z) \neq 0$ آن گاه f نگاشت همدیس نامیده می‌شود.

نکته. اگر نگاشت f همدیس باشد زاویه بین هر دو منحنی هموار و جهت آن ها تحت نگاشت تغییر نمی‌کند.

مثال. الف) نگاشت $\omega(z)=az+b$ همدیس است.
ب) نگاشت $\omega(z)=e^z$ همدیس است.
ج) نگاشت $\omega(z)=z^n$ در همه جا به جز $z=0$ همدیس است.

- تعریف نگاشت دوخطی ← تبدیل $\omega=\dfrac{az+b}{cz+d}$ را گویند به شرط آن که $ad \neq 0$ باشد.
(تبدیل دوخطی = تبدیل موبیوس)

نکته ۱. مهم. در تبدیل دوخطی اگر $ad=cb$ باشد آن گاه تبدیل دوخطی به تبدیل ثابت تبدیل می‌شود و همچنین اگر $c=0$ باشد به تبدیل خطی تبدیل می‌شود.

** تمرین های زیاد ـ هم سؤال تستی یا تشریحی

نکته مهم. تعیین یک تبدیل دوخطی که نقاط z_1 و z_2 و z_3 را به نقاط ω_1 و ω_2 و ω_3 تبدیل می‌کند و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(\omega-\omega_1)(\omega_2-\omega_3)}{(\omega-\omega_3)(\omega_2-\omega_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

← این مثال را جواب را خودمان می‌کنیم اشتباه سؤال قبلی است.

مثال ۱: تبدیل دوخطی را بیابید به‌طوری‌که مقادیر $z_1=\infty$ و $z_2=i$ و $z_3=0$ را به نقاط $w_1=0$ ، $w_2=i$ ، $w_3=\infty$ را می‌برد؟

$$\frac{(z-\infty)(i-0)}{(z-0)(i-\infty)} = \frac{(w-0)(i-\infty)}{(w-\infty)(i-0)}$$

نکته: وقتی یکی از zها یا wها برابر ∞ باشند در حل مسئله سعی می‌کنیم به جای $\frac{\text{عدد}}{\infty}=0$ صورت تبدیل را ساده‌تر بیان کنیم.

$$\frac{(w-0)(i-w_3)}{(w-w_3)(i-0)} = \frac{(z-z_1)(i-0)}{(z-0)(i-z_1)}$$

(در سؤال شده تجربه جنس صفحه‌ها اضافه است نبود بنویسیم.)

ـ عبارت سمت چپ معادله را بر w_3 و عبارت راست معادله را بر z_1 تقسیم می‌کنیم (در واقع فاکتورگیری از w_3 و z_1 است.)

$$\frac{w_3 w\left(\frac{i}{w_3}-1\right)}{w_3 i\left(\frac{w}{w_3}-1\right)} = \frac{z_1 i\left(z/z_1-1\right)}{z z_1\left(\frac{i}{z_1}-1\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{w\left(\frac{1}{w_3}-1\right)}{i\left(\frac{w}{w_3}-1\right)} = \frac{\left(\frac{z}{z_1}-1\right)i}{\left(\frac{i}{z_1}-1\right)z}$$

$$\Rightarrow \frac{-w}{-i} = \frac{-i}{-z} \Rightarrow wz = i^2$$

$$wz = -1$$

$$\boxed{w = \frac{-1}{z}}$$

http://www.ab-rafiee.com

www.AB-RAFIEE.com

Year. Month. Date. ( )

نکته . برعکس به ازای هر نقطه‌ی ساده می‌توان نگاشت همدیس را یافت.

نکته 1 . تبدیل دوخطی که نیم صفحه‌ی فوقانی صفحه z را به دایره‌ی $|w|\leq 1$ در صفحه‌ی w می‌نگارد بطوری که $z=i$ به $w=0$ تبدیل می‌شود عبارت است از $w=\frac{i-z}{i+z}$.

نکته 2 . اگر در نکته‌ی فوق به جای $y>0$ صفحه z ، $x>0$ مفروض باشد آنگاه تبدیل بصورت زیر خواهد بود

$$w=e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}$$

نکته 3 . هیچ تبدیل دوخطی وجود ندارد که نیم صفحه $x>0$ را به دایره‌ی $|w|\leq 1$ بنگارد در صورتی که $z_0=0$ به $w_0=0$ نگاشته شود.

نکته . نگاشت $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ یا $w=z+\frac{a^2}{z}$ نگاشت ژوکوفسکی نامیده می‌شود.

BERKEH

http://www.ab-rafiee.com

فصل هفتم

سری های فوریه :

تابع دوره ای :

1) تابع f را متناوب گوییم اگر به ازای هر x داشته باشیم $f(x+T)=f(x)$ ، T را دوره ی تناوب تابع می نامیم.

نکته. اگر f متناوب باشد آنگاه $f(x+nT)=f(x)$ نیز متناوب است (دوره تناوب آن T (تناوب اصلی است).)

2) دوره تناوب $\sin x$ و $\cos x$ برابر است با 2π .

3)
اگر $f(-x)=f(x) \Rightarrow$ $f(x)$ یک تابع زوج است.
اگر $f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ f " فرد است.

f تابع زوج ← محور y ها محور تقارن است.
f تابع فرد ← مبدا مختصات مرکز تقارن است.

اگر f زوج $\Rightarrow$

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

اگر f فرد $\Rightarrow$

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$$

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

۲۷

تعریف کلی : مجموعه‌ای از دنباله توابع $f(n)$ که $n=1$ تا $n=\infty$ است را نسبت به تابع وزن $\omega(n)$ در بازه $\{a,b\}$ متعامد گوییم اگر

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f_m(x) f_n(x)\,\omega(x)\,dx = 0 \\ \\ m \neq n \end{array} \right.$$

مثالهای کلی :

۱- مجموعه توابع $\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}_0^\infty$ و $\left\{\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}_0^\infty$ با تابع وزن $\omega(x)=1$ در بازه $\{-L,L\}$ متعامدند. (توابع فوریه‌اند.)

2 - توابع لوژاندر با تابع وزن $\omega(x)=1$ متعامدند در فاصله $\{-1,1\}$.

توابع لوژاندر $\longrightarrow$ $P_m(x) = \frac{1}{m!\,2^m}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$

3 - توابع چبیشف با تابع وزن $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ در فاصله $\{-1,1\}$ متعامدند.

۴- مجموعه توابع لاگر با تابع وزن $\omega(x)=x$ در فاصله $\{0,2\}$ متعامدند.

- تعریف سری فوریه : فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $\{-L,L\}$ تعریف شده باشد و داشته باشیم $f(x+2L) = f(x)$ آنگاه بسط فوریه‌ی آن بصورت زیر تعریف می‌شود :

Year. Month. Date. ( )

سری فوریه کلی ←

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\ a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n=0,1,2,\dots \\ b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n=1,2,\dots \end{cases}$$

مثال ۱) سری فوریه تابع $f(x)=1+x$ با دوره تناوب 2π در بازه $(-\pi,\pi)$ بدست آورید.

$$f(x+2L)=f(x) \Rightarrow L=\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\cancel{\cos 0}^{\,1}\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\pi+\cancel{\frac{\pi^2}{2}}+\pi-\cancel{\frac{\pi^2}{2}}\right)=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\cos nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\sin nx\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)}$$

http://www.ab-rafiee.com

مثال. توابع زیر را برای سری فوریه حفظ کنید. (در سوالات تستی حتی طراح زیر از سری فوریه استفاده میکند)

1) $f(x)=x^2$
$T=2l$
$\{-l,l\}$

$$\xrightarrow{\text{بسط فوریه}} f(x)=\frac{2^2}{3}+\frac{4l^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n^2}$$

2)

http://www.ab-rafiee.com

جلسه پنجم

سری فوریه:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n=0,1,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

مثال ۱، سری فوریه تابع زیر را بیابید؟

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -k\,dx + \int_{0}^{\pi} k\,dx\right) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -k\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\cos nx\,dx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -k\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} k\sin nx\,dx\right) = \frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} n \text{ زوج باشد} \rightarrow b_n = 0 \\ n \text{ فرد باشد} \rightarrow b_n = \frac{4k}{n\pi} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1} \frac{4k}{n\pi}\sin nx = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

نکته: در مثال فوق اگر به جای x مقدار $\frac{\pi}{2}$ را قرار دهیم آن گاه داریم:

http://www.ab-rafiee.com

۳۰

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4k}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right)$$

$$k = \frac{4k}{\pi}\left(\cdots \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots}$$ ← معمولاً در سؤالات تستی می‌آید.

مثال: اگر بسط فوریه تابع $f(x) = x^2$ با دوره تناوب $2L$ در فاصله $(-L, L)$ برابره با زیر باشد.

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^n \cos\frac{n\pi x}{L}}{n^2}$$

آن‌گاه مقدار مجموع سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را بدست آورید.

$$\xrightarrow{x=0} f(0) = 0 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-L^2/3}{4L^2/\pi^2} \Rightarrow \boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

+ مثال ۴ ص ۱۴۲ — همه سؤال‌های تستی بوده است. حتماً حل شود.

نکته خیلی مهم ← اگر تابع $f(x)$ زوج باشد ضرایب فوریه آن بصورت زیر خواهد بود.

$b_n = 0$

$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$

STAEDTLER

http://www.ab-rafiee.com

و اگر تابع $f(x)$ فرد باشد ضرایب فوریه آن بصورت زیر است .

$$a_0=0$$
$$a_n=0$$
$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

تعریف مهم ← چنانچه از نظر فوق مخفی است در بسط فوریه توابع زوج cos وجود داشته و در بسط فوریه توابع فرد sin وجود دارد. چنین بسط ها را که فقط یا cos و یا sin دارند بسط نیم دامنه ای نامیده شده که حالت اول را بسط فوریه cos و حالت دوم را بسط فوریه sin می نامند.

مثال ۱ : بسط فوریه cos تابع $f(x)=x$ را در فاصله $(0,\pi)$ بدست آورید.

مشخص است که تابع فرد است و چون بسط فوریه آن از $(0,\pi)$ مورد نظر است پس شرایط گفته شده فوق دیگر برقرار نمی باشد (یعنی a_0 و a_n لزوماً صفر نمی باشند) پس بدون در نظر گرفتن زوج یا فرد بودن تابع صرفاً با استفاده از تعریف بسط فوریه cos مسئله را حل می کنیم ، یعنی b_n را صفر در نظر گرفته و فقط a_0 و a_n را محاسبه می کنیم .

STAEDTLER

http://www.ab-rafiee.com

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx \cdot x\,dx = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$$

مثال، بسط فوریه Cos از $f(x)=x$ در فاصله $(-\pi,\pi)$ را بدست آورید.

چون فوریه در این فاصله معنی نیست بلکه در فاصله $(0,\pi)$ معنی است.

مثال، بسط فوریه $f(x)=x$ را در فاصله $(0,\pi)$ بدست آورید.

برای حل بازه را به $(-\pi,\pi)$ تبدیل نموده و مسئله را حل می کنیم.

مثال، بسط فوریه $f(x)=x$ را در فاصله $(-\pi,\pi)$ بدست آورید.

تابع فرد است پس: $a_0=0$, $a_n=0$, $b_n\neq 0$

(سؤال تشریحی دوره‌های قبل)

مثال مهم، سری فوریه تابع زیر را در فاصله $(-\pi,\pi)$ بدست آورید.

(مثال 5 ص 144)

$$f(x)=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

برای حل تابع را مجدداً بازنویسی می‌کنیم ...

STAEDTLER

http://www.ab-rafiee.com

$$f(x)=\begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

با توجه به تعریف تابع در فاصله $(\pi, -\pi)$ به صورت فوق مشخص است که تابع فرد است

در نتیجه a_0 و a_n هر دو صفر است و $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ است.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx \right) = \dots$$

(ادامه‌ی تمرین حل با شماست، ادامه‌اش کم نیست.)

نکته. نتیجه از مثال فوق ←

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

(صفر نشود.)

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

STAEDTLER®

http://www.ab-rafiee.com

نکته مهم. آزمونهای مربوط به فصل هفتم از ص 166 حتماً خوانده و حفظ شود مخصوصاً آزمون ۱ آزمون ۲ و آزمون ۳ و آزمون ۴ و آزمون ۵ و آزمون ۹ و آزمون ۱۰

مثال مهم (تمرین ۸ ص 163) ← با نوشتن سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=x^2$ در بازه $(0,2)$ و به کمک اتحاد پارسوال نشان دهید $\boxed{\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$.

حفظ شود.

نکته: اتحاد پارسوال ←

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\begin{cases} b_n = 0 \rightarrow a_n = ? \quad a_0 = ? \\ a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x^2\,dx = 8/3 \\ a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = (-1)^n \frac{16}{n^2\pi^2} \end{cases}$$

(در اینجا تابع زوج است.)

$$f(x) = \frac{8}{6} + \sum (-1)^n \frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

STAEDTLER®

http://www.ab-rafiee.com

www.AB-RAFIEE.com

جایگذاری در اتحاد پارسوال :

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \rightsquigarrow \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x^4\,dx = \frac{(8/3)^2}{2} + \sum\left(a_n^2 + 0^2\right)$$

$$\frac{64}{10}$$

$$\frac{64}{10} - \frac{64}{18} = \sum\left(a_n^2\right) \longrightarrow$$

پس

ادامه

$$x=0 \rightarrow f(0) = 0 = \frac{8}{6} + \sum (-1)^n \frac{16}{n^2\pi^2}$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-8/6}{16/\pi^2} = \frac{-8\pi^2}{6\times 16} = \frac{-\pi^2}{12}$$

$$\cdots \quad \frac{64}{10} - \frac{64}{18} = \sum\left(\frac{(-1)^n \times 16}{n^2\pi^2}\right)^2$$

$$\frac{64}{10} - \frac{64}{18} = \frac{16^2}{\pi^4}\sum \frac{1}{n^4} \Rightarrow$$

$$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\frac{64}{10} - \frac{64}{18}}{\frac{16^2}{\pi^4}} = \frac{\pi^4}{90}$$

STAEDTLER®

http://www.ab-rafiee.com

جلسه دهم:

فصل هشتم:

نکته: انتگرال و تبدیل فوریه: در تعریف سری فوریه اگر دوره تناوب به سمت بینهایت میل کند به جای سری فوریه از انتگرال فوریه استفاده می‌شود.

نکته: شرایط استفاده از انتگرال فوریه: (انرژی بیشتر برای تمام فضا مختصات حقیقی)

شرط اول ← f در بازه $(-L, L)$ تکه‌ای هموار باشد.

شرط دوم ← f در بازه $(-\infty, \infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد. ($\int |f(x)|\, dx$ محدود باشد.)

نکته: اگر تابع $f(x)$ دو شرط فوق الذکر را داشته باشد آنگاه در هر نقطه پیوستگی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{\infty} \left(A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right) d\alpha \\ A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\, dt \\ B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\, dt \end{cases}$$

سؤال

مثال ۲۰: تابع داده شده را به صورت انتگرال فوریه بنویسید:

الف)

$$f(x)\begin{cases} \pi & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

STAEDTLER

http://www.ab-rafiee.com

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow$$ چون f غیر صفر تنها بین $-\pi$ و π است در نتیجه از آن محدوده متفاوت بین صفر انتگرال ها را بین $-\pi$ و π در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} A(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos\alpha t \, dt = \dfrac{2}{\alpha}\sin\alpha\pi \\ B(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \pi \sin\alpha t \, dt = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\alpha}\sin\alpha\pi \cos\alpha x \, d\alpha}$$

۴

ب) ثابت کنید $\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}}_{\text{که محقق شود.}}$ است.

با توجه به اصل صفر/ر قبل اتان برابر با π است.

در تابع $f(x)$ به جای $x=0$ قرار میدهیم.

$$\underline{f(0)} = \int_0^{\infty} {}^{2}/_{\alpha} \sin\alpha\pi \, d\alpha$$

$$\Rightarrow \pi = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\pi \, d\alpha \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha} d\alpha$$

تغییر متغیر: $\begin{cases} \alpha\pi = u \\ \pi \, d\alpha = du \end{cases}$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u/\cancel{\pi}} \frac{du}{\cancel{\pi}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du}$$

STAEDTLER

http://www.ab-rafiee.com

نکته: اگر تابع $f(x)$ زوج یا فرد باشد آنگاه یکی از ضرایب فوریه ($A(\alpha)$ یا $B(\alpha)$) صفر است.

نکته: اگر تابع $f(x)$ زوج باشد آنگاه:

$$\begin{cases} B(\alpha) = 0 \\ A(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \end{cases}$$

و اگر تابع $f(x)$ فرد باشد آنگاه:

$$\begin{cases} A(\alpha) = 0 \\ B(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt \end{cases}$$

تعریف ←

اگر f زوج باشد انتگرال فوریه آن $\Rightarrow f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\cos\alpha x\,dt\,d\alpha$

«انتگرال فوریه کسینوسی»

اگر f فرد باشد انتگرال فوریه آن $\Rightarrow f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\sin\alpha x\,dt\,d\alpha$

«انتگرال فوریه سینوسی»

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt = F(\alpha)}$$

STAEDTLER

http://www.ab-rafiee.com

مثال ۲۳، تبدیل فوریه تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

حفظ شود

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{\infty} t e^{-i\alpha t}\,dt=\frac{-1}{\alpha^2\sqrt{2\pi}}$$

چون در $x<0$ برابر صفر است.

تعریف تبدیل فوریه cos دار و sin دار ←

تبدیل فوریه کسینوسی:

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$$

تبدیل فوریه سینوسی:

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt$$

چند نکته مهم در خصوص خواص تبدیل فوریه ←

1) $F(c_1f+c_2g)=c_1F(f)+c_2F(g)$

مهم

2) $F(f')=i\alpha F(f)$

مهم

3) $F(f'')=-\alpha^2F_c(\alpha)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f'(0)$

STAEDTLER®

http://www.ab-rafiee.com

WWW.AB-RAFIEE.com

تبدیل فوریه sin های مشتق تابع f برابر است با:

** دینی / ۱ مجهول ④ $-\alpha F_c\{f\}$

تبدیل فوریه مشتق دوم تابع f برابر است با:

⑤ $-\alpha^2 F\{f\}$

تعریف شده مهم: تابع هوی ساید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

خیلی مهم (تکراری است)

مثال. تبدیل فوریه کسینوسی زیر را حساب کنید. (جواب آخر را حفظ کنید.)

$f(x) = e^{-x}$

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \alpha t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} \cos \alpha t \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\alpha^2 + 1}$$

روش حل انتگرال: ① روش جزء به جزء ② تبدیل cos به e ...

نکته: توابع زیر تبدیل فوریه ندارند.

① تابع ثابت: $f(x) = k$

+ ولی e^{-x} تبدیل فوریه دارد.

② $f(x) = e^{x}$

③ $f(x) = e^{2x} = e^{4x} = e^{6x} = \dots$

http://www.ab-rafiee.com

Year. Month. Date. ( )

فصل نهم .

به عهده‌ی خود دانشجو - حفظ کردن آزمون‌های معیار جوابی آخر فصل نهم .

http://www.ab-rafiee.com