

خلاصه مفاهیم مربوط به فصل ۷ (مدارهای الکتریکی I)

مفاهیم توابع سینوسی : و تبار با تغییرات سینوسی زیر رادرفرید :

$$v(t) = v_m \sin \omega t$$

دامنه موج سینوسی
ر دامنه ماکزیمم

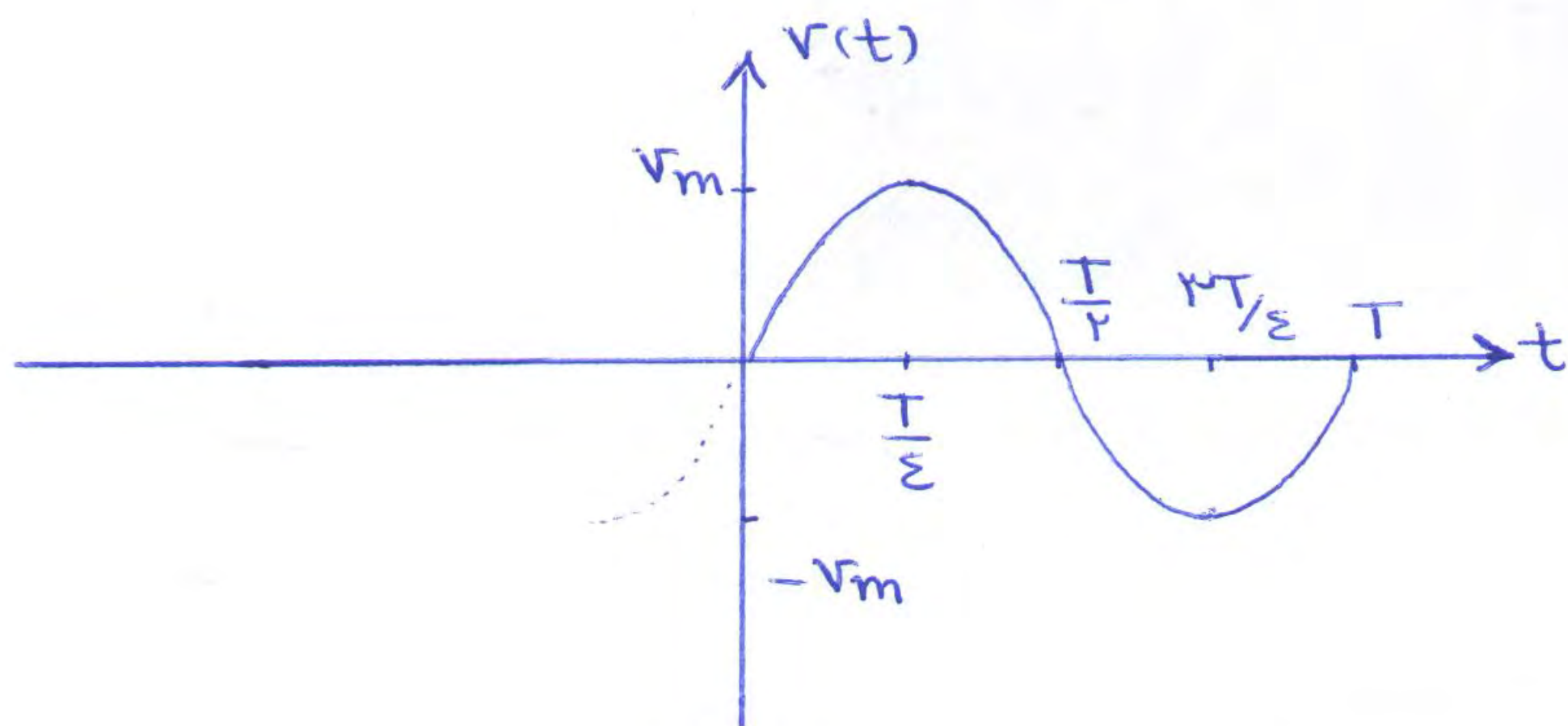
ω : فرکانس زاویه ای
یا فرکانس رادیانی
بر حسب rad/s

$$v_{rms} = \frac{v_m}{\sqrt{2}}$$

و تار موثر

$$v(t+T) = v(t)$$

✓ توابع سینوسی متناوب با دوره تناوب T می باشند :



$$f = \frac{1}{T} \quad \text{Hz} \rightarrow \text{sec}$$

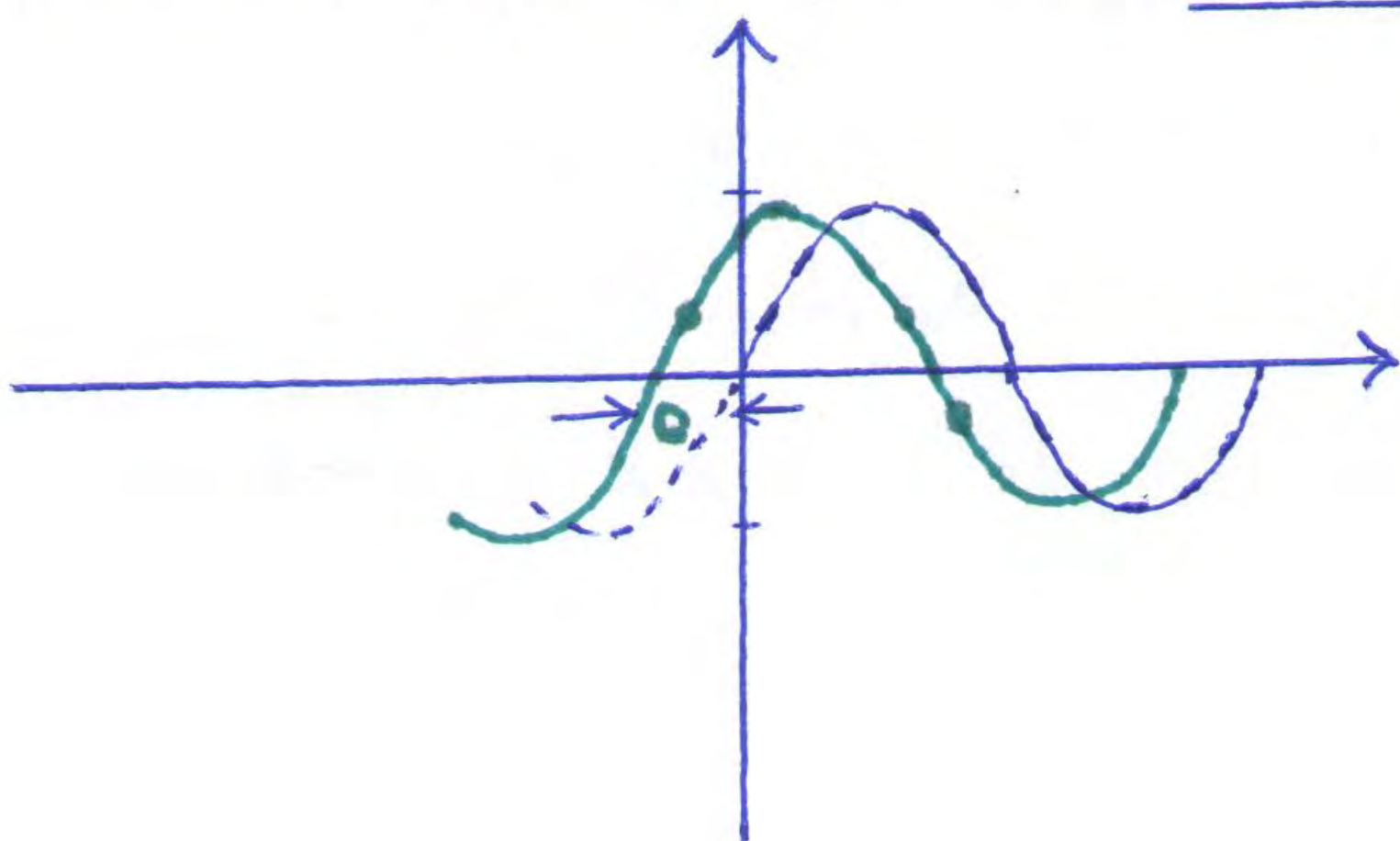
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

مفاهیم سینوسی و سینوسی :

شکل کلی تر تابع سینوسی به صورت زیر است : $v(t) = v_m \sin(\omega t + \theta)$

θ : زاویه فاز

زاویه فاز، مقدار زاویه ای است که موج سینوسی اصلی می باشد یا خط چین،
به اندازه آن به چپ رفته یا به راست داریم و در ترخ داده است. بی نویسم $v_m \sin(\omega t + \theta)$



به اندازه θ رادیان نسبت به $v_m \sin \omega t$
پیش فاز است. همچنین می توانیم
بنویسیم $\sin \omega t$ نسبت به $\sin(\omega t + \theta)$
 θ رادیان پس فاز است.

در تمام حالات، پهنای فاز از 0 تا 90° دو سینوس اختلاف فاز دارند؛ اگر زاویه فاز هر دو یکی باشد، دو سینوس هم فازند.

توجه: هنگام مقایسه فاز دو موج سینوسی باید:

- ۱- هر دو را به شکل سینوس یا کسینوس بنویسیم
- ۲- دامنه هر دو باید مثبت باشند.
- ۳- زمانش را باید یکسان باشند.

تبدیل سینوس به کسینوس: سینوس و کسینوس در واقع یک تابع هستند 90°

اختلاف فاز دارند پس: $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^\circ)$

همچنین می توان گفت: 36° را می توانیم سینوس از آن کم کرد، بدون آنکه در سینوس تغییر کند. مثلاً:

در مقابل دو تابع سینوسی: $V_1 = V_{m1} \cos(\omega t + 10^\circ)$ ، $V_2 = V_{m2} \sin(\omega t - 30^\circ)$ داریم:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{m1} \cos(\omega t + 10^\circ) \\ &= V_{m1} \sin(\omega t + 90^\circ + 10^\circ) \\ &= V_{m1} \sin(\omega t + 100^\circ) \end{aligned}$$

می توانیم ببینیم V_1 نسبت به V_2 130° پیش فاز است.

همچنین می توان گفت: V_1 نسبت به V_2 23° پیش فاز است زیرا V_1 را هم

می توان بصورت زیر نوشت:

$$V_1 = V_{m1} \sin(\omega t - 26^\circ)$$

$100 - 36^\circ$

تست: (مسئله ۹۲-۹۱) در دو جریان در یک مدار برابر $I_2 = 20 \sin(100t - 45^\circ)$ و

$I_1 = 120 \cos(100t + 30^\circ)$ باشد، آن ها جریان I_1 نسبت به I_2 چگونه است؟

۱- پیش فاز ۲- پس فاز

۳- 170° جلوتر ۴- 170° درجه عقب تر

حل :

$$I_1 = 120 \cos(100t + 30^\circ)$$

$$I_1 = 120 \sin(100t + 90^\circ + 30^\circ)$$

$$I_1 = 120 \sin(100t + 120^\circ)$$

$$I_2 = 20 \sin(100t - 50^\circ)$$

فاز I_1 نسبت به I_2 : $120 - 50 = 70^\circ$:
 عقبتر (پس فاز)

نکته (۲) :
 در مجموع به این علت علامت منفی نداشته است اعطای باشد
 که می عقبتر به معنوم - است (پس فاز)
 (70° درجه جلوتر هم صحیح می باشد.)

تست : در صورتی دو منبع ولتاژ سینوسی با مشخصات $V_1 = 100 \cos(377t + 30^\circ)$
 و $V_2 = 50 \cos(377t + 70^\circ)$ باشند، آنگاه موج V_1 نسبت به V_2

$$V_1 = 100 \cos(377t + 30^\circ)$$

جلوتر است ؟

$$V_2 = 50 \cos(377t + 70^\circ) \rightarrow V_1 \text{ نسبت به } V_2 \rightarrow 30 - 70 = -40$$

پس V_1 نسبت به V_2 : 40° درجه عقبتر (پس فاز) است یا
 موج V_2 نسبت به V_1 : 40° درجه جلوتر (پس فاز) است.

نمایش فازور در توابع سینوسی:

در حالت کلی برای هر تابع $f(t)$ (بی توانی و ولتاژ یا جریان باشد) داریم:

$$f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \theta)$$

$$F_{\text{rms}} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}}$$

مقدار مؤثر

$$f(t) = \sqrt{2} F_{\text{rms}} \cos(\omega t + \theta)$$

فازور موج $f(t)$ را بصورت زیر نمایش می دهیم: (رابطه در کتاب ص ۱۷۲)

$$\underline{f(t) = \sqrt{2} F_{\text{rms}} \cos(\omega t + \theta)} \rightarrow \underline{\vec{F} = F_{\text{rms}} \angle \theta}$$

نمایش فازور

مثال: نمایش فازوری یک منبع سینوسی با معادله $v(t) = 110\sqrt{2} \cos(377t + 70^\circ)$

$$\vec{V} = 110 \angle 70^\circ$$

بصورت زیر می باشد:

مثال: در صورتی که فازور جریان یک منبع سینوسی برابر $\vec{I} = 50 \angle -30^\circ$ باشد و سرعت زاویه ای موج هم $120\pi \text{ rad/sec}$ باشد، تابع زمانی منبع جریان را بنویسید.

$$I_{\text{rms}} = 50$$

$$\omega = 120\pi \text{ rad/s}$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_{\text{rms}} \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \times 50 \cos(120\pi t - 30^\circ) \checkmark$$

روابط فازوری اجزاء مدار R, L, C:

$$v(t) = Ri(t) \rightarrow \vec{V} = R \vec{I}$$

* روابط فازوری عنصر مقاومت:

$$\vec{I} = \frac{1}{R} \vec{V}$$

$$V_{\text{rms}} = R I_{\text{rms}}$$

$$\vec{V} = \vec{I} R$$

نتیجه: سلف و خازن و القا و دما هم فاز هستند و دما و سلف و القا و دما هم فاز هستند و سلف و خازن و القا و دما هم فاز هستند. (رابطه در کتاب ص ۱۷۶)

مثال: در فصل دوم ۹۱-۹۲ (در صورتی که ولتاژ دوسر مقاومت \mathcal{E} برابر با $10 \cos(100t - 50^\circ)$ است)

V_m

با استفاده از قانون اهم می‌توانیم به دست آوریم که:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{10 \cos(100t - 50^\circ)}{5} = 2 \cos(100t - 50^\circ)$$

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{I} = I_{rms} \angle \theta$$

$$\vec{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

**** روابط فازوری عنصر سلف:**

$$\vec{V} = j\omega L \vec{I} \rightarrow \vec{I} = \frac{1}{j\omega L} \vec{V}$$

$$V_{rms} = (\omega L) I_{rms}$$

$$\angle \vec{V} = 90^\circ + \angle \vec{I}$$

ن

پس، اندازه ولتاژ دوسر سلف به مقدار ωL برابر اندازه ولتاژ جریان

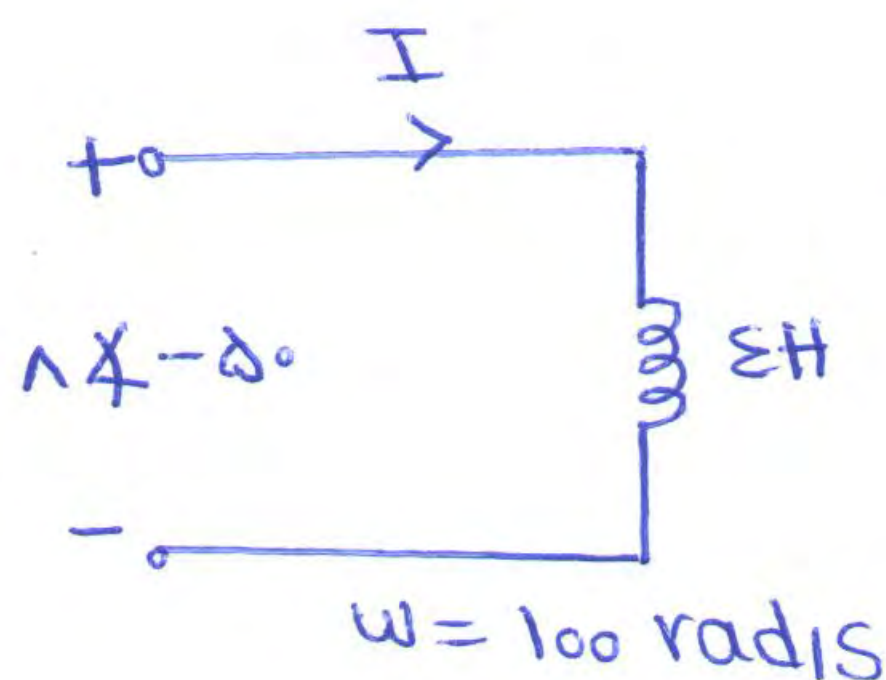
سلف است و زاویه فاز ولتاژ، 90° درجه بیشتر از فاز جریان

است. بنابراین، سلف موج جریان سلف، 90° درجه پیش از سلف

موج ولتاژ آن، پس فاز است.

به عبارت دیگر موج جریان سلف به میزان $\frac{1}{\omega L}$ سیل از سلف موج

ولتاژ دوسر آن عقب‌تر می‌باشد.



نست: (مثال اول ۹۱-۹۲) در مدار ولتاژ $i(t)$ کدام است؟

$$V_{rms} = \omega L I_{rms} \rightarrow I_{rms} = \frac{1}{100 \times 4} = 0.0025$$

$$\angle \vec{V} = 90^\circ + \angle \vec{I} \rightarrow \angle \vec{I} = -50^\circ - 90^\circ = -140^\circ$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_{rms} \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = 0.0025\sqrt{2} \cos(100t - 140^\circ) \checkmark$$

*** روابط مازوری و غیر خازن :

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\vec{I} = j\omega C \vec{V} \rightarrow \vec{V} = \frac{1}{j\omega C} \vec{I}$$

$$I_{rms} = C\omega V_{rms}$$

$$\angle \vec{I} = 90^\circ + \angle \vec{V}$$

نکته : زاویه مازور جریان، 90° درجه از زاویه مازور ولتاژ جلوتر است
 سلف و موج جریان سینوسی 90° درجه جلوتر (پیش ماز) از سلف
 موج ولتاژ سینوسی دوسر خازن است.

نست : در فصل دوم (۹۰-۹۱) در مورد مازور ولتاژ $5 - 8$ به دوسر خازن
 با ظرفیت $4F$ اعمال شود آنگاه جریان عبوری از خازن

در سری زاویه ای $\omega = 100 \text{ rad/s}$ چقدر است؟

$$I_{rms} = C\omega V_{rms} = 8 \times 100 \times 8 = 3200 \checkmark$$

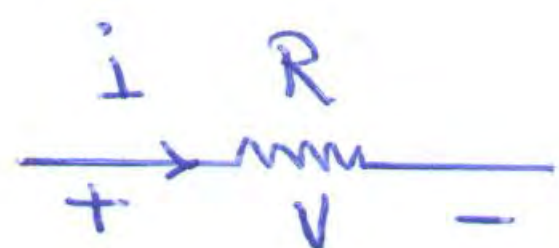
$$\angle \vec{I} = \angle \vec{V} + 90^\circ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$i(t) = 3200\sqrt{2} \cos(\omega t + 40^\circ) \checkmark$$

* تقریب (۷-۲) کتاب هت برای تقریب بیرونی دلیلی بسیار حل شود.

برای سه عنصر فوقی یک مدار RLC، مقادیر این عناصر در هر دوره زمان و فرکانس

لغو می شود زیرا بی باقی است:

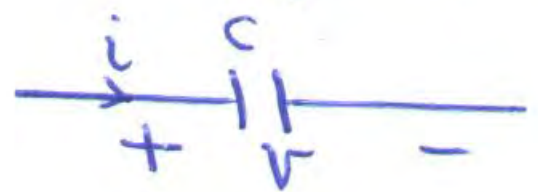


$$V = RI$$

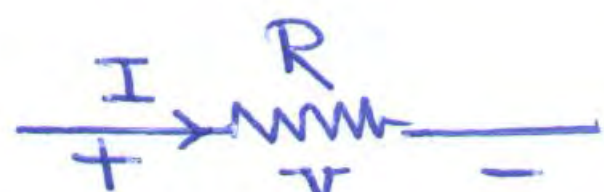
✓ دوره زمان:



$$V = L \frac{di}{dt}$$



$$V = \frac{1}{C} \int i dt$$

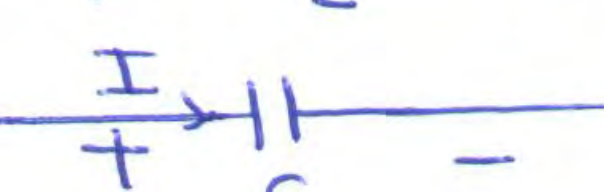


$$V = RI$$

✓ دوره فرکانس:



$$V = j\omega L I$$



$$V = \frac{1}{j\omega C} I$$

قانون اهم

توجه: امپدانس و ادیتانس هازن، سلف و مقاومیت در حالت مازوری لغو می شود زیرا بی باقی است:



$$Z_R = R \quad \Omega$$

$$Y_R = \frac{1}{R}$$

ادیتانس

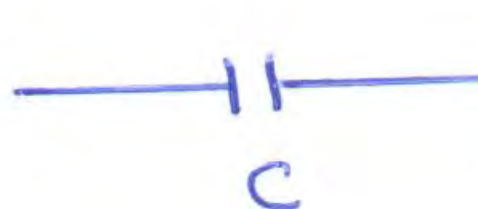
(هم در کتابها)

(نیمسال دوم ۹۲-۹۱)



$$Z_L = j\omega L \quad \Omega$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L}$$



$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \Omega$$

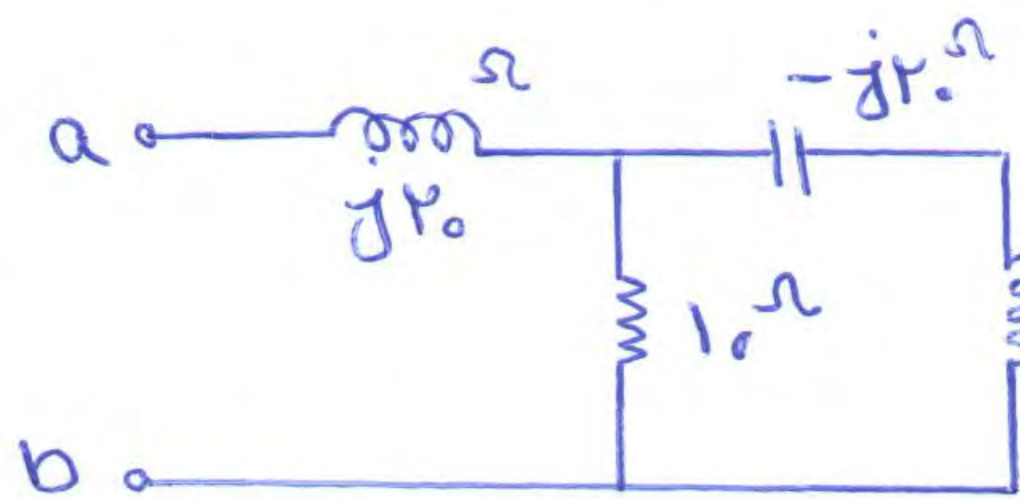
$$Y_C = j\omega C$$

* ادیتانس عکس امپدانس

$$Y = \frac{1}{Z}$$

بنابر این امپدانسها مطابق قانون سری و موازی مقادیر آنها را می توانیم به هم سری و موازی می شوند.

نست: رتاسبتان ۱۹۱ در مدار سلف مقابل، امپدانس دایره سلف از سرها α, b برابر کدام فرکانس است؟



$$Z_L = j\omega L = j10 \times 10^{-3} = j10$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j20 \times 10^{-6}} = -j10$$

$$-j10 + j10 = 0 \quad \text{سری}$$

$$10 \parallel -j10 = \frac{10 \times -j10}{10 - j10} = \frac{-100j}{10 - j10}$$

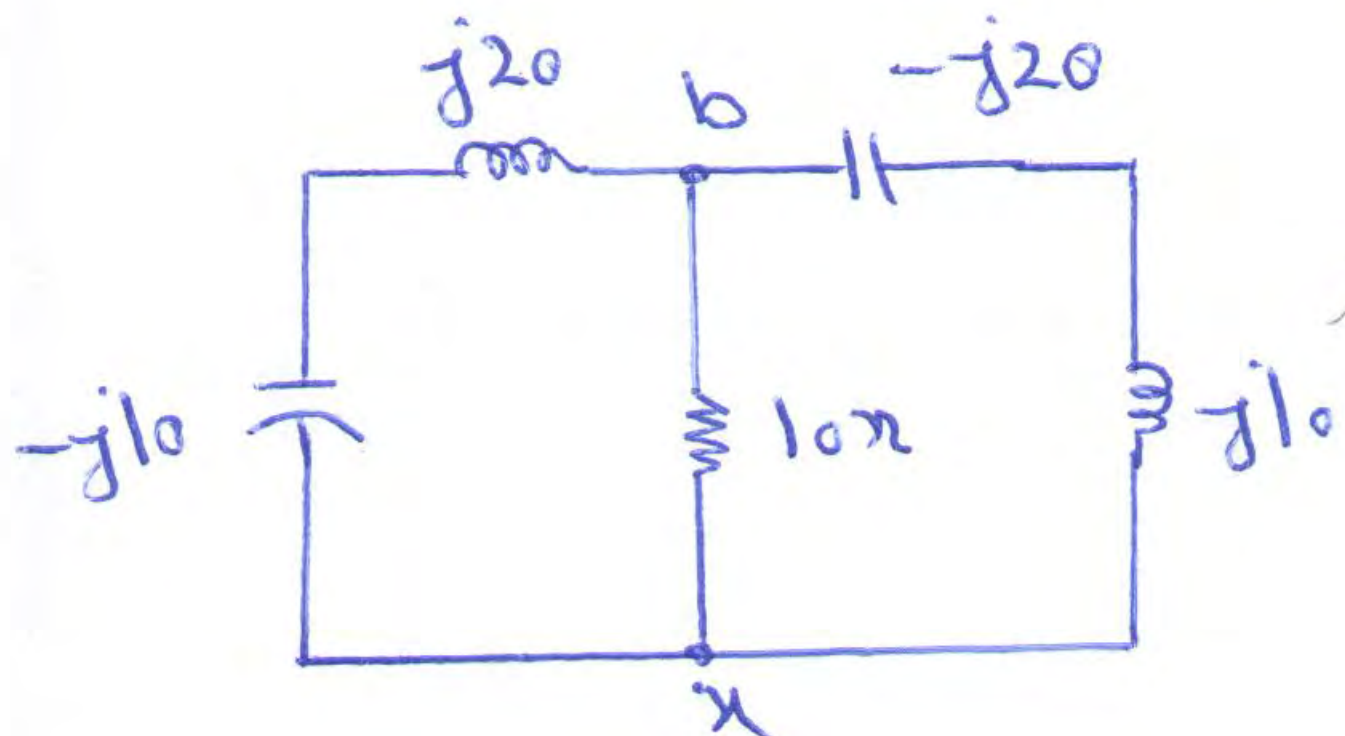
$$\frac{-100j}{10 - j10} + j20 = \frac{-j10}{1 - j} + j20 = \frac{-j10 + j20 + 20}{1 - j} = \frac{10j + 20}{1 - j}$$

$$j^2 = -1$$

$$\frac{20+10j}{1-j} \times \frac{1+j}{1+j} = \frac{20+10j+20j-10}{1-(j^2)} = \frac{10+30j}{2} = 5+15j \checkmark$$

تست: امپدانس ورودی مدار زیر از دو سر b-x کدام است؟

ریسمان دوم ۹۱-۹۰



$$\rightarrow \text{سری } -j20 + j10 = -j10$$

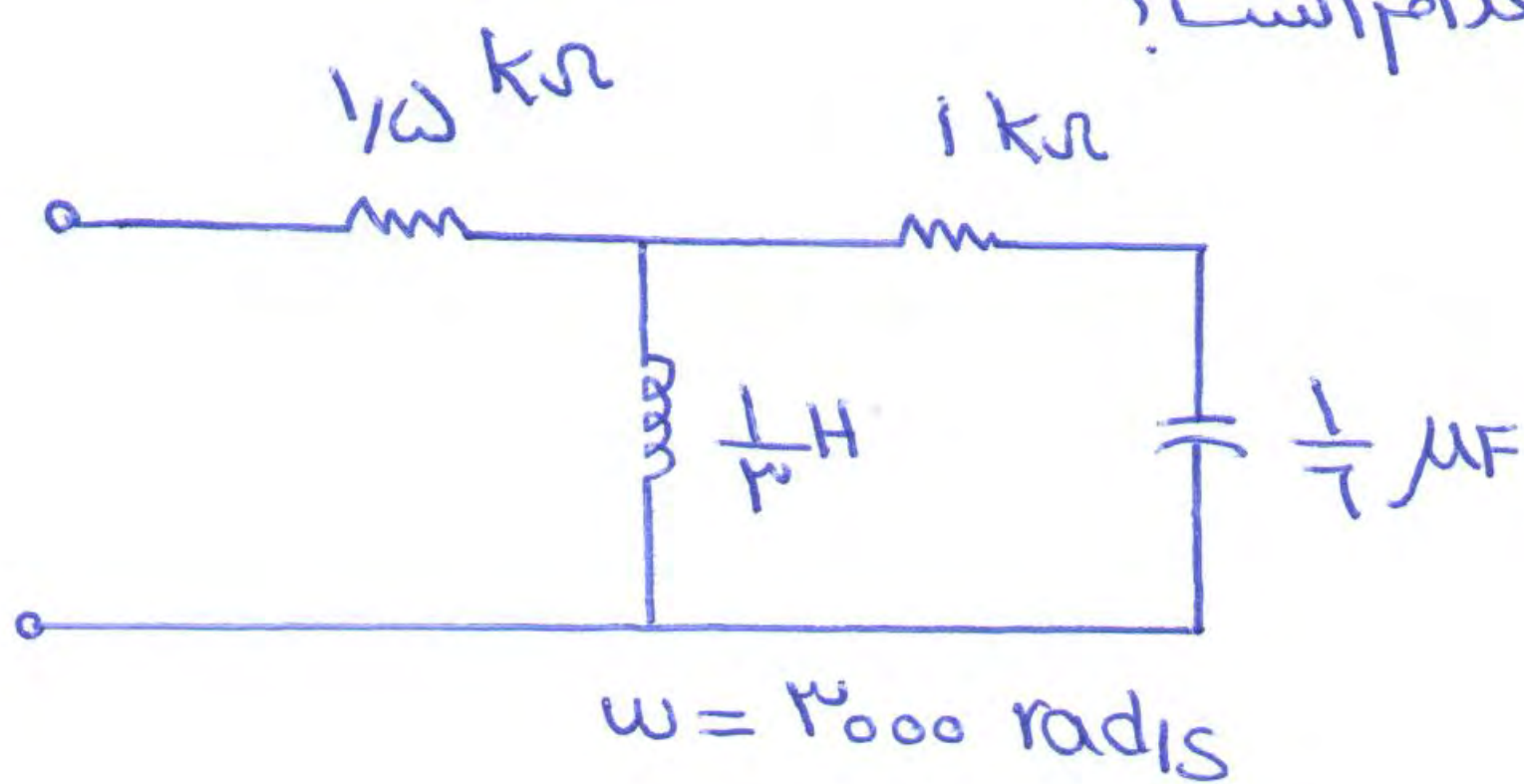
$$\text{سری } j20 - j10 = j10$$

$$\rightarrow \text{جواب موازی } -j10 \parallel j10 = \frac{-100j^2}{10j-10j} = \frac{100}{0} = \infty$$

$$\infty \parallel 10 = 10 \Omega \checkmark$$

ن یادآوری: در اتصال سری دو امپدانس، مقاومت معادل ده پورقگیری برابر با الما بزرگتر و در اتصال موازی، مقاومت معادل ده پورقگیری برابر با الما کوچکتر است.

تست: امپدانس معادل مدار رو بولد کدام است؟



$$Z_L = jL\omega = j \times \frac{1}{3} \times 2000 = 1000j \Omega \quad (1000 - 2000j) \text{ سری}$$

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j \times \frac{1}{7} \times 10^{-6} \times 2000} = -2000j \Omega \quad Z' = (1000 - 2000j) \parallel Z_L$$

$$Z_{R1} = 1/5 \times 1000 = 1500 \Omega$$

$$Z', 1500 \text{ سری}$$

$$Z_{R2} = 1000 \Omega$$

(بر حسب لیوا هم)

$$(1-2j) \parallel j = \frac{(1-2j) \times j}{1-j} = \frac{j+2}{1-j} \times \frac{1+j}{1+j} = \frac{j+2-1+2j}{1+1} = \frac{1+3j}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}j \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2}j + 1500 = 1500 + \frac{3}{2}j \checkmark$$

توان در مدارهای با تکریب سینوسی :

$$\begin{cases} v(t) = \sqrt{2} V_{rms} \cos(\omega t + \alpha) \\ i(t) = \sqrt{2} I_{rms} \cos(\omega t + \beta) \end{cases}$$

$$P_{av} = V_{rms} I_{rms} \cos(\alpha - \beta) = V_{rms} I_{rms} \cos \phi$$

رابطه توان
(۱۹۶)

توان متوسط
(توان حقیقی واقعی)
زاویه تکریب قدرت
میزب قدرت
سبکه

در شب و ات W

→ میزب قدرت بیش از → $\phi > 0 \rightarrow \alpha > \beta$ اگر
است

زاویه فازور جریان از زاویه فازور ولتاژ عقب تر است و مدار القا می باشد

زاویه فازور ولتاژ است
میزب قدرت → $\phi < 0 \rightarrow \alpha < \beta$ اگر
پیش فاز است.

زاویه فازور جریان نسبت به زاویه فازور ولتاژ پیش فاز است.

توان در

بار سلفی

$$\vec{V} = V_{rms} \angle \alpha$$

$$I = \frac{\vec{V}}{j\omega L} = \frac{V_{rms}}{j\omega L} \angle \alpha - 90^\circ$$

توان در یک بار اهمی با تکریب سینوسی :

$$\begin{array}{lll} V = V_{rms} \angle \alpha & \alpha - \beta = 0 \rightarrow & P_{av} = V_{rms} I_{rms} \\ I = I_{rms} \angle \beta & \text{هم فاز} & P_{av} = R I_{rms}^2 \end{array}$$

$$\phi = \alpha - \beta = \alpha - (-\alpha - 90^\circ) = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0$$

میزب قدرت برابر صفر است.

توان حقیقی در یک سلف، برابر صفر است.

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin \phi$$

توان موهومی :

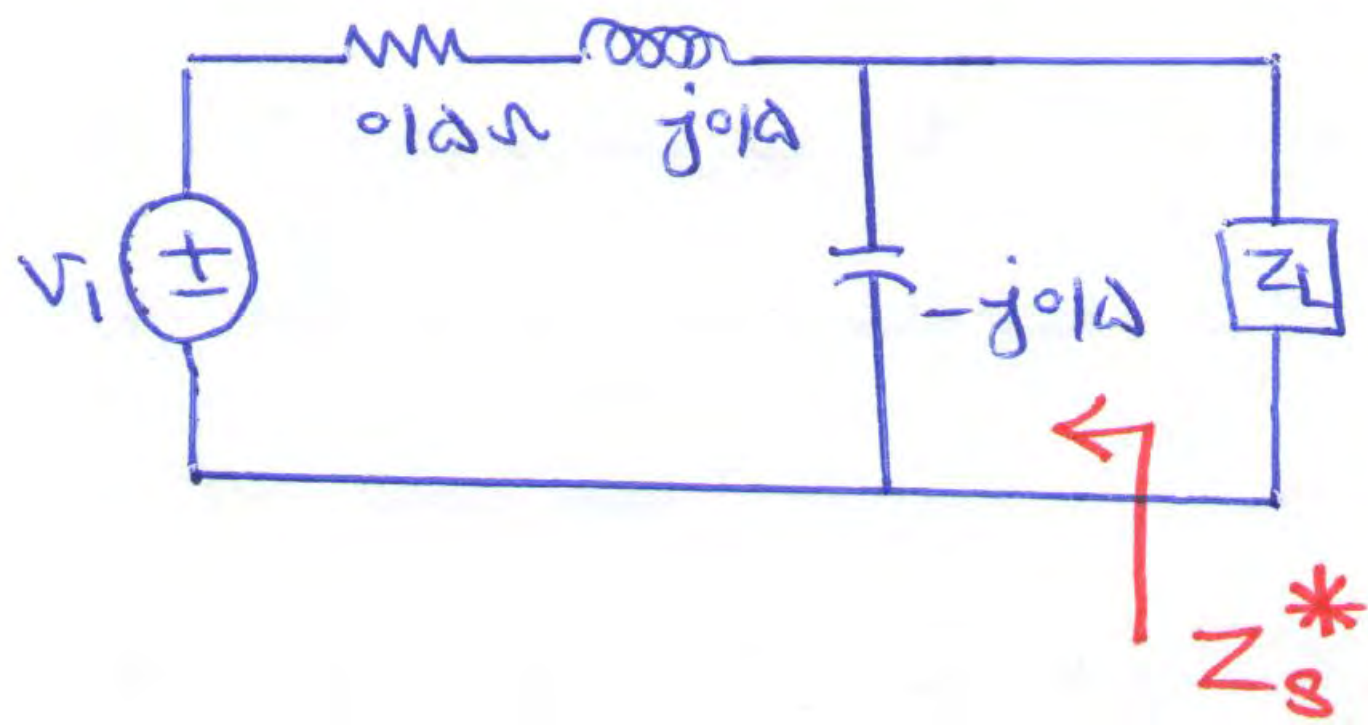
$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin 90^\circ = V_{rms} I_{rms}$$

$$Q = X_L I_{rms}^2$$

$$X_L = \omega L$$

در شب و ات
(VAR)

نست: (مسئله ۹۰-۹۱) امپدانس Z_L برای انتقال حداکثر توان به آن کدام است؟



$$Z_S^* = Z_L$$

$V_1 \leftarrow$ اتصال کوتاه
 Z_S را به استای آوریم

$$\begin{aligned} (0.15 + j0.15) \parallel -j0.15 &= \frac{1}{\frac{1}{0.15} + \frac{1}{-j0.15}} = \frac{1}{\frac{1}{0.15} - \frac{j}{0.15}} = \frac{0.15}{1 - j} \\ &= \frac{0.15(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{0.15(1+j)}{1+1} = \frac{0.15}{2}(1+j) = \frac{0.15}{2} + \frac{0.15}{2}j \end{aligned}$$

$$Z_S^* = \frac{0.15}{2} + \frac{0.15}{2}j \quad \checkmark$$

نست: (مسئله ۹۰-۹۱) کدام فرمول صحیح است؟

$$Q_L = X_L I_{rms}^2$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{ج}$$

$$P = S \sin \theta \quad \text{ب} \quad \checkmark$$

$$S = V_{rms} I_{rms} \quad \text{الف}$$

$$P = S \cos \theta$$

نست: برای انتقال حداکثر توان به بار در شبکه سینوسی چه رابطه ای باید برقرار باشد؟

$$\vec{Z}_L = \frac{1}{2} \vec{Z}_S^*$$

$$\vec{Z}_L = \vec{Z}_S^* \quad \checkmark$$

$$\vec{Z}_L = \frac{1}{2} \vec{Z}_S$$

$$\vec{Z}_L = \vec{Z}_S$$

موفق باشید عزیزانم

پدرامبارک

سامان مسرور

$$I = \frac{\vec{V}}{-jX_c} = \frac{V_{rms}}{X_c} \angle \alpha + 90^\circ$$

توان در بار خازنی:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad \varphi = \alpha - \beta = \alpha - (\alpha + 90^\circ) = -90^\circ$$

$$\cos \varphi = 0 \rightarrow \text{میزب قدرت}$$

توان ها
موهومی

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(-90^\circ) = -V_{rms} I_{rms}$$

$$Q = -\frac{V_{rms}^2}{X_c} = -X_c I_{rms}^2$$

مهم: توان ظاهر:

$$S = V_{rms} I_{rms}$$

$$P = S \cos \varphi$$

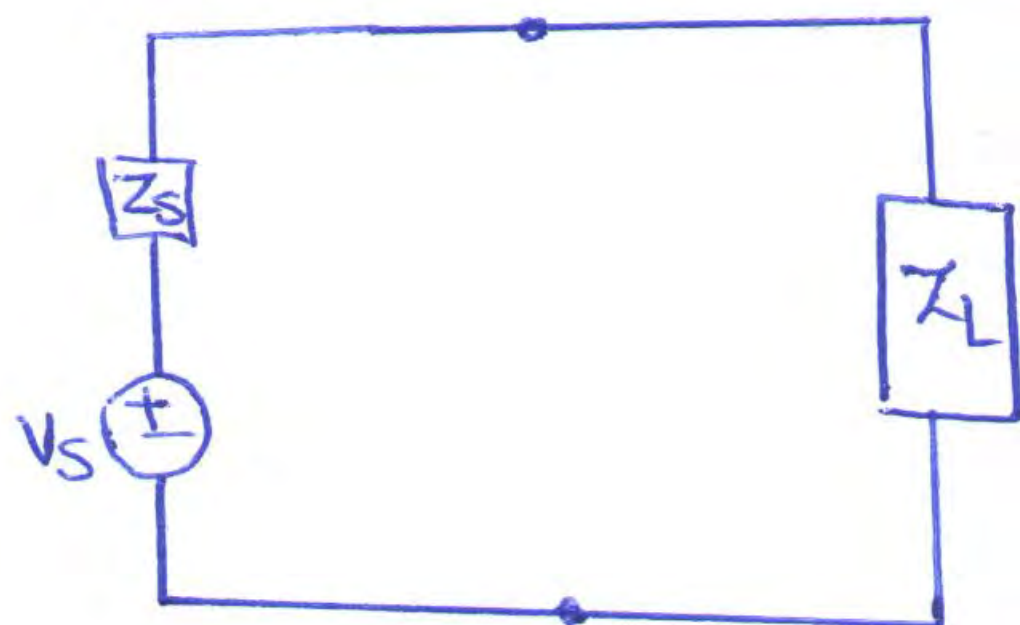
$$Q = S \sin \varphi$$

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad \vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^*$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S = P + jQ \quad \left\{ \begin{array}{l} P = Q \cot \theta = S \cos \theta \\ Q = P \tan \theta = S \sin \theta \end{array} \right.$$

در حالتی که $\theta = 0$



مهم: ضریب انتقال توان:

این ضریب بیان می کند که برای آنکه

توان واقعی منتقل شده به بار

امپدانس Z_L به Z_s برابر شود

$$Z_L = Z_s^*$$

علامت * به معنی مزدوج است

به عبارت دیگر باید امپدانس بار برابر مزدوج امپدانس کل شبکه
دیده شده از سمت بار Z_L باشد.

رابطه در کتاب (۲)