جزوه معادلات

استاد : سرکار خانم ندا بهشتی

تهیه و تنظیم : سرکار خانم اکبری

درس معادلات دیفرانسیل : استاد بهشتی اصل ۱

تعریف معادلات دیفرانسیل : فرض کنید $y=F(x)$ بر بازه I تعریف شده باشد بر معادله‌ای که شامل متغیر x ، تابع $y=F(x)$ و مشتق‌های $F(x)$ باشد یک معادله دیفرانسیل گویند.

مثال: $x'yy'+2y''+2x^2=7$ ، $(x^2+y^2)dx-2dy=5$

در حل معادله دیفرانسیل به دنبال $F(x)$ یا $y=F(x)$ می‌گردیم که به ازای آن معادله صفر شود.

مرتبه معادله دیفرانسیل : بیشترین مرتبه مشتق در یک معادله دیفرانسیل را مرتبه آن معادله گویند.

درجه معادله دیفرانسیل : توان بیشترین مرتبه مشتق

مرتبه ۳ ← $y''' + y'^4 + 3xy' = 0$
درجه ۱

معادله دیفرانسیل معمولی : معادله دیفرانسیل فاقد تابع مثلثاتی ، نمایی ، لگاریتمی و ... را معادله دیفرانسیل معمولی گوییم.

$y''+2xy=0$ ✓ ، $\sin xy'+e^{y''}+2x^3=0$ ✗

Subject :   Date

مثال؟ کدام یک از معادلات دیفرانسیل معمولی زیر از مرتبه ۲ و درجه ۱ است؟ 2

① $y'' \sin x = y^3 + y'^3$ ② $\sin y'' = xy' - y$

③ $y' + y'' = 4x$ ✓   ④ $y'^2 + y''^2 + 2x = 0$

مثال؟ $y'' = e^x$

$$y'' \Rightarrow \frac{d(y')}{dx} \Rightarrow \frac{d(y')}{dx} = \frac{e^x}{1} \Rightarrow d(y') = e^x dx$$

به تعداد مرتبه y انتگرال داریم. $y' = e^x + c$

$$\Rightarrow \int d(y') = \int e^x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + c \Rightarrow \int dy = \int (e^x + c)' dx \Rightarrow y = e^x + cx + c'$$

جواب کلی عمومی

* یک معادله دیفرانسیل می تواند بی نهایت جواب داشته باشد.

* تعداد ثابت ها با مرتبه معادله دیفرانسیل برابر است.

* ثابت ها می شماریم ← مشتق می گیریم ← C ها را حذف می کنیم.

تعریف: جوابی که شامل n ثابت مانند $c_1, c_2, \ldots, c_n$ باشد را یک خانواده n پارامتری

از کجا پیدا کنیم.

معادله دیفرانسیل ⇒ y؟

معادله دیفرانسیل؟ ⟵ $y =$ خانواده n پارامتری

(3) روش یافتن معادله دیفرانسیل از روی خانواده n پارامتری جوابها:

① معادله دیفرانسیل را بیابید که از مرتبه n باشد.

② ثابت ها، ظاهر نشده باشند.

مثال: معادله دیفرانسیل خانواده 2 پارامتری از جوابها $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

حل: تعداد پارامترها 2 → مرتبه 2 می شود پس → دو بار مشتق می گیریم از y

$$\begin{cases} ① \ y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ ② \ y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} \\ ③ \ y'' = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} \end{cases}$$

حالا باید معادله را برحسب c ها حل کنیم و کاری کنیم که c ها حذف شوند.

$①,② \Rightarrow y + y' = 3c_2 e^{2x} \ ) \ x-2 \ + \ ②,③ \Rightarrow y' + y'' = 6c_2 e^{2x}$

$①,② \ x-2 + ②,③ \Rightarrow y' + y'' - 2(y + y') = 0$

مثال: معادله دیفرانسیل حاصل از حذف A در معادله $y = A\cos 2x + \sin 2x$ کدام است؟

4

الف) $(2\sin 2x)\,y' + (\cos 2x)\,y = 2$

ب) $(2\cos 2x)\,y' + (\sin 2x)\,y = 2$

ج) $(\cos 2x)\,y' + (2\sin 2x)\,y = 2$

د) $(\sin 2x)\,y' + (2\cos 2x)\,y = 2$

$y = A\cos 2x + \sin 2x$

$y' = -2A\sin 2x + 2\cos 2x$

$\to y \times 2\sin 2x$

$\to y' \times \cos 2x$

$\cos 2x\, y' + (2\sin 2x)y = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2(\underbrace{\cos^2 2x + \sin^2 2x}_{1})$

$= (\cos 2x)y' + 2(\sin 2x)y = 2$

در معادله دیفرانسیل $y = \beta\cos(\omega x + \alpha)$ در صورت حذف ثابت‌های α, β چه رابطه‌ای بدست می‌آید

الف) $y = xy' + y'^2 + 1$

ب) $y'' + \omega^2 y = 0$

ج) $y'' - 3y'\omega = 0$

د) $y' - 3\omega y = -12$

$y' = -\beta\omega\sin(\omega x + \alpha)$ $\qquad$ $y'' = -\beta\omega^2\cos(\omega x + \alpha)$

$y \times -\omega^2$ $\qquad$ داریم $y'' = -\omega^2(\beta\cos(\omega x + \alpha))$

$y'' = -\omega^2 y \to y'' + \omega^2 y = 0$

5

تمرین: معادلات دیفرانسیل زیر جواب $y = cx^2 + d$ کدام است؟

① $x^2y'' - 2xy' + y^2 = 0$ ② $y'' + (x^2 - 2x)y' - y = 0$

③ $y''x - y' = 0$ ④ $2xy'' - x^2y' + y = 0$

نکته: $y' = e^x$ $y(0) = 1$

$dy = e^x dx \Rightarrow y = e^x + C$ جواب عمومی $1 = e^0 + C$ $1 = 1 + C \to C = 0$

جواب خصوصی $\Rightarrow y = e^x$

انواع معادلات دیفرانسیل: ① جداشدنی ② همگن ③ کامل ④ خطی مرتبه اول ⑤ برنولی

معادله دیفرانسیل جداشدنی، اگر بتوان به فرم $F(y)\,dy = G(x)\,dx$ نوشت آن را جداشدنی گوییم.

مثال → $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow dy \times y = dx \times x$

مثال → $x(\sqrt{1-y})\,dx - (\sqrt{1-x^2})\,dy = 0$

$\Rightarrow x(\sqrt{1-y})\,dx = (\sqrt{1-x^2})\,dy \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-y}}\,dy$

(6) جواب معادله دیفرانسیل $x\frac{dy}{dx}+y^2=4$ کدام است؟

① $y=\frac{2(Cx^4-1)}{Cx^4+1}$ ② بدلیل غیرخطی بودن جواب ندارد.

③ $y=\frac{2(Cx^4+1)}{Cx^2}$ ④ $y=Cx^4+1$

جواب: $x\,dy=(4-y^2)\,dx$, $\int\frac{dy}{4-y^2}=\int\frac{dx}{x}$

تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(y+1)dx+\tan x\,dy=0$ ؟

① $y=C\sin x$ ② $y=C\cos x+1$ ③ $y=C\cot x+1$

④ $y=C\sin x-1$

تمرین: جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'=x+y-1$ و $y(0)=1$ ؟

① $e-1$ ② $e+1$ ③ e ④ 1

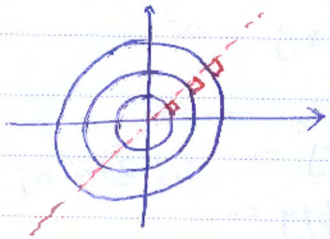
تمرین: جواب معادله دیفرانسیل $y'-xy-2x=0$ که از صفر و یک عبور کند کدام است؟

① $ye^{\frac{1}{2}x^{-2}}+2=0$ ② $ye^{-\frac{1}{2}x}+3=0$

③ $y+2-3e^{\frac{1}{2}x^2}=0$ ④ $y+3-4e^{\frac{1}{2}x^2}=0$

جلسه دوم 92,7,6

تعیین مسیرهای متعامد یک خانواده از منحنی دو خانواده $F_1(x,y,c)=0$ و $F_2(x,y,c)=0$ مسیرهای متعامد یکدیگر نامیم اگر هر عضو هر خانواده بر کلیه اعضای دیگر خانواده عمود باشند.



$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y=ax \ , \ \forall a \end{cases}$$

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$m \to y'$

تمام $- \dfrac{1}{y'}$

برای تعیین مسیرهای متعامد به روش زیر عمل می‌کنیم:

① معادله دیفرانسیل $F(x,y,c)=0$ را بدست می‌آوریم به شکل $g(x,y',y)=0$

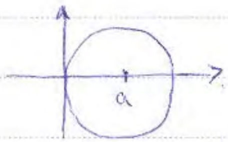
② در $g(x,y,y')=0$ به جای y' مقدار $-\frac{1}{y'}$ را جایگزین می‌کنیم

③ معادله دیفرانسیل اخیر را حل می‌کنیم تا به $F^*(x,y,c)=0$ برسیم جواب معادله یعنی آن دسته خم‌هایی که بر معادله عمود هستند.

مثال: معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همه دوایری که از ابتدا می‌گذرند و مرکز آنها بر محور xها قرار دارد کدام است؟

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \quad ① \qquad\qquad 8 \qquad\qquad y' = \frac{2xy}{y^2-x^2} \quad ②$$

$$y' = \frac{y^2-x^2}{2xy} \quad ③ \qquad\qquad y' = \frac{x^2-y^2}{2xy} \quad ④$$



$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax + y^2 = a^2$$

$$\begin{cases} ① \; x^2 - 2ax + y^2 = 0 \\ ② \; 2x - 2a + 2yy' = 0 \end{cases} \Rightarrow ② \times (-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - \cancel{2ax} + y^2 = 0 \\ -2x^2 + \cancel{2ax} - 2xyy' = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{متعامد}} -x^2 + y^2 - 2xy\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = 2xyy' \Rightarrow y' = \frac{y^2-x^2}{2xy} \xrightarrow{\text{تعامد}} -\frac{1}{y'} = \frac{y^2-x^2}{2xy}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

مثال: معادله مسیری که عمود بر خانواده منحنی $y = cx^2$ بوده و از نقطه $(1,1)$ می‌گذرد کدام است؟

$x+2y^2=3$ (4) $x^2+2y^2=3$ (3) $2y^2-x^2=1$ (2) $x=y^2$ (1)

حل: معادله دیفرانسیل را باید بکنیم که ثابت دارد پس یک مرتبه مشتق می‌گیریم 9

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y' = 2cx \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2\cancel{c}x}{\cancel{c}x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow y' = \frac{2y}{x}$$

معادله دیفرانسیل $\xrightarrow[\text{متعامد}]{y' \to -\frac{1}{y'}}$ $-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x} \Rightarrow 2yy' + x = 0$

حالا باید c را بیابیم.

$$2y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow \int 2y\,dy = \int -x\,dx \Rightarrow \frac{2}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

حالا نقطه را جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow 1+\frac{1}{2} = c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

در آخر: $\Rightarrow 2y^2 + x^2 = 3$

* نکته * برای تعیین خانواده منحنی‌های متعامد به خانواده قطبی $F(r, \theta, c) = 0$ به جای $\frac{r'}{r}$ مقدار $-\frac{r}{r'}$ را قرار می‌دهیم.

مثال ۹: مسیرهای متعامد $r = c(1+\sin\theta)$

10

① $r = k(-1+\sin\theta)$ ② $r = k(2-\sin\theta)$

③ $r = k(1+\sin\theta)$ ④ $r = k(1-\sin\theta)$

$$r' = c\cos\theta \qquad \frac{r'}{r} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \xRightarrow{\text{متعامد}} \frac{-r}{r'} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\left(r' = \frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$\frac{r'}{r} = -\frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} \times \frac{1}{r} = \frac{-(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{-(1+\sin\theta)}{\cos\theta}\, d\theta \qquad \int \frac{u'\,du}{u} = \ln u$$

$$\ln r = \int \left(-\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta + c$$

$\ln$ هم یک مقدار ثابت: c

$$\ln r = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\cos\theta| + \ln k$$

$$\ln r = \ln k\,(\overbrace{\sec\theta}^{\frac{1}{\cos\theta}} + \overbrace{\tan\theta}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}) \times \cos\theta$$

$$e^{\ln r} = e^{\ln k(1+\sin\theta)} \Rightarrow r = k(1+\sin\theta)$$

beheshti.neda@aut.ac.ir

Subject: Date

معادله دیفرانسیل همگن

تابع همگن: $F(x,y)=0$ همگن از درجه n اگر و تنها اگر $F(tx,ty)=t^n F(x,y)$

$$F(x,y)=\frac{x}{y} \to F(tx,ty)=\frac{tx}{ty}=t^0\,\frac{x}{y} \Rightarrow t^0 F(x,y)$$

همگن از درجه صفر

معادله دیفرانسیل $y'=F(x,y)$ را همگن گویند اگر $F(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد

مثال؟

1) $F(x,y)=x^2-y^2-y^2\ln\frac{x}{y}$

$$(tx,ty)\ T^2x^2-T^2y^2-T^2y^2\ln\frac{tx}{ty}=T^2(x^2-y^2-y^2\ln x/y)$$

$$=T^2(F(x,y))$$

2) $F(x,y)=\frac{x+1}{y-x} \Rightarrow \frac{Tx+1}{Ty-Tx}=\frac{Tx+1}{T(y-x)}$ همگن نیست

3) $F(x,y)=\sqrt{y}\sin x/y \Rightarrow \sqrt{Ty}\sin\frac{Tx}{Ty} \Rightarrow T^{1/2}\sqrt{y}\sin x/y$ همگن از درجه $1/2$

$$4)\ F(x,y)=\frac{x}{x+y} \Rightarrow \frac{Tx}{T(x,y)} \Rightarrow T^{0}(F(x))$$ همگن از درجه صفر

حل یک معادله دیفرانسیل همگن:

برای حل یک معادله همگن از تغییر متغیر $y=ux$ استفاده می‌کنیم تا به معادله دیفرانسیل جدا شونده تبدیل شود

$y'=F(x,y)$ همگن

$$u'x+u=y'$$

$$y'=F(x,y)\Rightarrow \frac{dy}{dx}$$

مثال $(x-y)dx+(x-4y)dy=0$

$$(x-y)dx=-(x-4y)dy$$

همگن $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{4y-x}$

$$\Rightarrow u'x+u=\frac{x-ux}{4(ux)-x} \Rightarrow u'x=\frac{1-u}{4u-1}-u=\frac{1-\cancel{u}-4u^2+\cancel{u}}{4u-1}$$

$$u'x=\frac{1-4u^2}{4u-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot x=\frac{1-4u^2}{4u-1} \Rightarrow \int\frac{4u-1}{1-4u^2}\,du=\int\frac{dx}{x}$$

$u = f(x) \Rightarrow \frac{y}{x} = f(x)$ $\qquad 1-4u^2 = (1-2u)(1+2u)$

$\frac{A}{1-2u} + \frac{B}{1+2u} = \frac{4u-1}{1-4u^2} \Rightarrow A + 2uA + B - 2uB = 4u - 1$

$\begin{cases} u(2A-2B) = 4u \\ A+B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - B = 2 \\ A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\ln a + \ln b = \ln a.b$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x$ نکته

$\int \frac{\frac{1}{2}\, du}{1-2u} - \int \frac{-\frac{3}{2}\, du}{1+2u}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \int \frac{-2\, du}{1-2u} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \int \frac{2\, du}{1+2u} + \ln c$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} \ln|1-2u| - \frac{3}{2} \ln|1+2u| + \ln c = \ln x$

$\Rightarrow -\ln|1-2u| - 3\ln|1+2u| + \ln c = 4\ln x$

$4\ln x + \ln|1-2u| + 3\ln|1+2u| = \ln c$

$\ln x^4 + \ln|1-2u| + \ln|1+2u|^3 = \ln c$

$$\ln\left(x^4 \cdot (1-2u) \cdot (1+2u)^3\right) = \ln c$$

$$x^4(1-2u)(1+2u)^3 = c \Rightarrow x^4\left(1-\frac{2y}{x}\right)\left(1+\frac{2y}{x}\right)^3 = c$$

اگر گفت در نقطه (۱و۱) باید C پیدا کنیم.

جلسه سوم دیفرانسیل 92,7,13

معادلات دیفرانسیل کامل: معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x,y)$ را که آن را بصورت $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ و شرط زیر برقرار باشد، $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

آنگاه معادله دیفرانسیل کامل است.

مثال: ? $\underbrace{(4x^2+y)}_{M}\,dx + \underbrace{(y^2-1)}_{N}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow 1 \neq 0$$

Subject: Date

(14)

روش حل معادله دیفرانسیل کامل،

فرض کنیم $F(x,y)=c$ جواب معادله دیفرانسیل باشد، F باید در شرایط زیر صدق کند:

$$1)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \qquad 2)\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y\,dx+(x+y^2)\,dy=0$ را حل کنید.

حل: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow 1=1\ \checkmark$ کامل است

$$F(x,y)=c \xrightarrow{\text{(1) شرط}} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\overset{M}{y}$$

$$\xrightarrow{x \text{ انتگرال نسبت به}} \int \partial F(x,y)=\int y\,dx \Rightarrow F(x,y)=yx+\underline{h(y)}$$

در واقع برحسب y است.

$$\xrightarrow{\text{(2) شرط}} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x+h'(y)=x+y^2 \Rightarrow h'(y)=y^2$$

$$\Rightarrow h(y)=\frac{1}{3}y^3+c \Rightarrow F(x,y)=yx+\frac{1}{3}y^3+c$$

Subject :

(15)

مثال: کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر کامل است؟

1) $\underbrace{(x^2+y^2+x)}_{M} dx + xy\,dy = 0$ ($2y$ ، y)

2) $\underbrace{y}_{M} dx + (\underline{2x - ye^{y}})\, dy = 0$ (1 ، 2)

3) $\underbrace{(2xye^{x^2} - 2x)}_{M} dx - e^{x^2} dy = 0$ ($2xe^{x^2}$ ، $-e^{x}$)

4) $(x^4 + y^4)\, dx - xy^3\, dy = 0$ ✓ (y^3 ، y^3)

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{xy' - 1}{1 - x^2 y}$ با شرط اولیه $y(0)=1$ کدام است؟

1) $\frac{1}{2}x^2y^2 - x - y = -1$

2) $\frac{1}{2}x^2y^2 - x - y = 1$

3) $x^2y^2 - x - y = 1$

4) $x^2y^2 - x - y = -1$

حل: باید ببینیم در $(0,1)$ معادله صدق می‌کند یا نه (گزینه‌ها را چک می‌کنیم) پس گزینه ۱ و ۴ ممکن است درست باشد.

تبدیل معادلات دیفرانسیل غیر کامل به کامل : (16)

فرض کنید معادله $Mdx + Ndy = 0$ کامل نباشد یعنی $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

اگر تابعی مانند $\rho(x,y)$ وجود داشته باشد بطوریکه $\rho M dx + \rho N dy = 0$ کامل باشد آنگاه $\rho(x,y)$ را عامل انتگرال ساز گوییم.

مثال: $(y^2+y)dx - xdy = 0$

حل: $\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = 2y+1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \rho(x,y) = \frac{1}{y^2}$

$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)}_{\rho M} dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{\rho N} dy = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{2}$

دیفرانسیل یعنی مشتق برای یک متغیر ، مشتقات جزئی یعنی مشتق برای چند متغیر کلاً دیفرانسیل یعنی مشتق

خلاصه عامل انتگرال ساز: $Mdx+Ndy=0$ کامل نباشد: $\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \neq 0$

الف) اگر $\frac{\Delta}{N}$ مقدار ثابت و یا تابعی از x باشد ($g(x)$) باشد آنگاه:

$$\rho(x,y) = e^{\int g(x)\,dx}$$

ب) اگر $\frac{\Delta}{-M}$ مقدار ثابت و یا تابعی از y باشد ($g(y)$) باشد آنگاه:

$$\rho(x,y) = e^{\int g(y)\,dy}$$

ج) $\frac{\Delta}{yN-Mx}$ مقدار ثابت و یا تابعی برحسب $z=xy$ باشد $g(z)$ باشد:

$$\rho(x,y) = e^{\int g(z)\,dz}$$

د) اگر هیچکدام از حالتهای بالا نباشد: $\rho(x,y)=x^m y^n$ است که m و n مقادیر مناسبی هستند

مثال) عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل $y'-2xy=x$ کدام است؟

الف) e^{-x^2} ب) e^{-2x} ج) e^{2x} د) e^{x^2}

نکته *: گزینه‌ها را جایگزین کنید (راه حل تستی)

حل: $(e^{x})^{x} = e^{x.x} = e^{x^2}$ $(e^{x})^{2} = e^{2x}$

$\frac{dy}{dx} - 2xy = x \Rightarrow 1dy - (2xy + x)\,dx = 0$

$\Rightarrow M = -(2xy + x) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x$

$N = 1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ $\Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$

$\frac{\Delta}{N} = \frac{2x}{1} = -2x \longrightarrow$ x تابعی $\rightarrow \rho(x,y) = e^{-\int 2x\,dx} = e^{-x^2}$

مثال: عامل انتگرال ساز $dx + 2xy\,dy = ye^{-y^2}dy$ را بدست آورید؟

حل: $dx + 2xy\,dy - ye^{-y^2} = 0 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 0$

$N = (2xy - ye^{-y^2}) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \Rightarrow \Delta = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$

$\frac{\Delta}{-M} = \frac{-2y}{-1} = 2y \Rightarrow \rho(x,y) = e^{\int 2y} = e^{y^2}$ حالت ب

Subject: Date

(19)

مثال: عامل انتگرال ساز $(x^2+xy^2)y'-3xy+2y^3=0$?

حل: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -3x+6y^2$

حاصل آخر $-5x+5y^2 \Rightarrow \Delta = 5(y^2-x)$

$\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x+y^2$

$x^m y^n\left[(x^2+xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0\right]$

$\Rightarrow (x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^{2+n})dy + (-3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3})dx = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow M = -3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3}$

1

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = -3(n+1)x^{m+1}y^n + 2(n+3)x^m y^{n+2}$

$N = x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^{2+n}$

2

$\dfrac{\partial N}{\partial x} = (m+2)x^{m+1}y^n + (m+1)x^m y^{2+n}$

①, ② شرط عامل بودن برابر است. $\Rightarrow -3(n+1) = m+2$, $2(n+3) = m+1$ $\Rightarrow \begin{cases} -3n-3 = m+2 \to m+3n = -5 \\ 2n+6 = m+1 \to -m+2n = -5 \end{cases}$

20

$\Rightarrow \begin{cases} 5n = -10 \\ n = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow m + (3)(-2) = -5 \Rightarrow m - 6 = -5 \Rightarrow \boxed{m = +1}$

$\mu(m,n) = x^{1} y^{-2} = \frac{x}{y^2}$

تمرین: مقدار α و β را طوری تعیین کنید که $x^{\alpha} y^{\beta}$ عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل $y\,dx + x(1-3y^2x^2)\,dy = 0$ باشد.

تعریف معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول:

a_0 و a_1 توابعی برحسب x و $(a_0(x) \neq 0)$

فرم کلی $\Rightarrow a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$

انتگرال ساز $\Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

نوعی دیگر از فرم کلی $\Rightarrow y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow p = \frac{a_1}{a_0}, \quad q = \frac{f}{a_0}$

$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)\, q(x)dx + c\right]$: جواب آخر معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول کامل

مثال: $x^2y' + \sin x\, y = 2$

حل: $y' + \frac{\sin x}{x^2}\, y = \frac{2}{x^2}$

مثال $\frac{1}{2}y' + e^x y = \sin x$

حل: در x^2 ضرب می‌کنیم

$\Rightarrow y' + \underbrace{x^2e^x}_{p(x)}\, y = \underbrace{x^2\sin x}_{q(x)} \Rightarrow \mu = e^{\int x^2 e^x dx}$

$y=\frac{1}{\mu}\left[\int \mu\, x^2 \sin x\, dx + c\right]$

مثال: $y'\ln(x-y) = 1+\ln(x-y)$ ؟

نکته * $\int \ln x = x\ln x - x$

$x-y=u$ $\quad (1-u')\ln u = 1+\ln u$

$x-u=y \Rightarrow y'=1-u'$ $\quad (1-u') = \frac{1+\ln u}{\ln u}$

$-u' = \frac{1+\ln u}{\ln u} - 1 \Rightarrow -u' = \frac{1+\ln u-\ln u}{\ln u} \Rightarrow u' = -\frac{1}{\ln u}$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-1}{\ln u} \Rightarrow \int \ln u\, du = \int -dx \Rightarrow u\ln u - u = -x + c$

$\Rightarrow (x-y)\ln(x-y) - (x-y) + x = c$

Subject: Date

جلسه چهارم 92,7,20

22

سؤال: کدام یک از عوامل زیر یک عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل مقابل است؟

$$(2xy^2+y)dx+(x+2x^2y-x^4y^3)dy=0$$

الف) $(xy)^{-4}$ ب) $(xy)^{-3}$ ج) $(xy)^2$ د) $(xy)^{-1}$

حل: $\Delta=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4xy+1-(1+4xy-4x^3y^3)=4x^3y^3$

$$\frac{\Delta}{yN-xM}=\frac{4x^3y^3}{-x^4y^4}=\frac{-4}{xy}=\frac{-4}{z}\quad , z=xy$$

$$\mu=e^{\int\frac{-4}{z}dz}=e^{-4\ln z}=(xy)^{-4}$$

مثال: اگر معادله دیفرانسیل $(2ye^{x^2y^3}+2y^2)dx+(2xe^{x^2y^3}+3xy)dy=0$

عامل انتگرال ساز بصورت $(xy)^a$ باشد، a کدام است؟

Subject :

Date

$1\ (4 \quad 23 \qquad -1\ (3 \qquad \frac{1}{2}\ (2 \qquad 2\ (1$

حل: $\Delta = y \Rightarrow \underbrace{yN - xM}_{I} = xy^2 \Rightarrow \frac{\Delta}{I} = \frac{y}{xy^2} = \frac{1}{xy}$, $xy = Z$

$$M = e^{\int \frac{1}{xy} d(x,y)} = e^{\ln xy} = (xy)^1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

؟ $xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ حل

حل: $\frac{\partial M}{\partial y} = x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

$\frac{\Delta}{N} \Rightarrow x$, $\frac{\Delta}{-M} = y$ $\qquad \rho = e^{\int \cdots}$ $\qquad \Delta = -x$

$\frac{-x}{1+x^2} \qquad \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$

page

* تغییر متغیر : اگر معادله دیفرانسیل $y' = F(ax+by+c)$ باشد با تغییر متغیر

$u = ax+by+c$ می‌توان آن را به جدا شدنی تبدیل کرد.

مثال : $y' = x+y-1$

حل : $u = x+y-1 \Rightarrow u' = 1+y' \Rightarrow y' = u'-1$

$u'-1 = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = u+1 \Rightarrow \frac{du}{u+1} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{u+1} = \int dx \Rightarrow \ln(u+1) = x+C$

یادآوری : $(e^u)' = u'e^u \Rightarrow \int u'e^u = \int (e^u)' = e^u$

$\Rightarrow \int \frac{du}{e^u} = \int e^{-u}\, du \Rightarrow -e^{-u} \Rightarrow -e^{-u} = x+C$

مثال : $y' = e^{2x+y-1} - 2$ ؟

الف) $e^{-2x-y+1} + x = C$

ب) $e^{2x-y+1} + x = C$

ج) $x^{2x+y-1} + x = C$

د) $x^{-2x+y+1} + x = C$

حل : $2x+y-1$ آنچه را می‌خواهیم u بگیریم باید در جواب ظاهر شود پس $2x+y-1$ را معادل u می‌گیریم باید به دنبال گزینه‌ای بگردیم که $2x+y-1$ در آن ظاهر باشد پس یا گزینه 2 یا 3 جواب می‌باشد.

$2x+y-1 = u \Rightarrow u' = y'+2 \Rightarrow y' = u'-2$

$\Rightarrow u'-2 = e^u - 2 \qquad u' = e^u \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^u \Rightarrow \int \frac{du}{e^u} = \int dx \Rightarrow e^u = x+C$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول : یعنی y و y' خطی باشند و به توان یک رسیده باشند نمایی و مثلثاتی نباشند

تمرین ۱: $y'-2xy=e^{x^2}$ تمرین ۲: $y'+(\tan x)y=\cos^3 x$

مثال: اگر $y'+2y=x^2+x$ و $y(0)=1$ آنگاه $y(1)=?$

یادآوری ← $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ و $y'+p(x)y=q(x)$

q و p توابعی بر حسب x

حل: $\mu(x)=e^{\int 2dx}=e^{2x} \Rightarrow y=\frac{1}{e^{2x}}\left[\int e^{2x}(x^2+x)+c\right]$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{e^{2x}}\left[\int (e^{2x}x^2+e^{2x}x)\,dx+c\right]$$

$$\int \underset{u}{\underset{\downarrow}{x^2}}\ \underset{dv}{\underset{\downarrow}{e^{2x}}}\,dx=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2}\cdot 2x\,dx$$

چیزی که می‌خواهیم از آن مشتق بگیریم را u در نظر می‌گیریم. بهتر است همیشه e^u را dv در نظر بگیریم

$u=x^2$ (?) $\quad du=2x\,dx \quad v=\frac{e^{2x}}{2}$

$$\int dv=\int \frac{2}{2}e^{2x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}}{2}\cdot 2x\,dx=\int x e^{2x}\,dx$$

$$y = \frac{1}{e^{2x}}\left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x}\,dx + \int x e^{2x}\,dx + c\right]$$

جواب عمومی

$$y = \frac{1}{e^{2x}}\left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} + c\right] \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{e^{2x}} \Rightarrow y(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 0 + \frac{c}{\cancel{e^0}_{1}} \Rightarrow c = 1$$ جواب خصوصی

معادله دیفرانسیل برنولی :

هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $y' + p(x)\,y = y^n q(x)$ را که در آن $n \neq 0$ می‌باشد، معادله دیفرانسیل برنولی گویند.

طرفین را بر y^n تقسیم می‌کنیم

$$y^{-n} \times y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

$$(1-n)\,y^{-n} \times y' + p(x)\,y^{1-n}(1-n) = q(x)(1-n) \quad , z = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n)\,y^{-n} \times y'$$

$$\Rightarrow z' + \underbrace{p(x)(1-n)}_{P}\,z = \underbrace{q(x)(1-n)}_{Q}$$

مثال: $y' + xy = \dfrac{x}{y^3}$?

حل: کل عبارت را در y^3 ضرب می کنیم

$$\Rightarrow 4y^3 y' + 4xy^4 = 4x \Rightarrow z = y^4 \Rightarrow z' + 4xz = 4x \Rightarrow \begin{matrix} p = 4x \\ q = 4x \end{matrix}$$

$$\mu = e^{\int 4x\,dx} = e^{2x^2} \Rightarrow z = e^{-2x^2}\left[\int e^{2x^2} \times 4x + c\right] = 1 + Ce^{-2x^2}$$

$$y = \sqrt[4]{1 + Ce^{-2x^2}}$$

مثال: $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$?

حل: $y^{-2}y' + y^{-1} = \cos x - \sin x \Rightarrow z = y^{-1} \Rightarrow z' = -1y'y^{-2}$

$$z' - z = -(\cos x - \sin x) \Rightarrow z' - z = -\cos x + \sin x$$

$$\mu e^{\int -dx} = e^{-x} \Rightarrow z = e^{x}\left[\left(\int e^{-x}(\sin x - \cos x)\right) + c\right]$$

$$\int e^{x}(\sin x - \cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

کسینوس رو u می گیریم که مشتق ازش بگیریم سینوس در بیاید.

$$\int u\,dv = \underset{\cos}{u}\,\underset{-e^{-x}}{v} - \int v\,du \Rightarrow \cos x = u \rightarrow du = -\sin x$$

$$e^{-x} = dv \rightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos - \int(-e^{-x})(-\sin x)\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$$

Subject:

Date

$\int e^{-x}(\sin x - \cos x)\,dx = \int e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx = \int e^{-x}\sin x +$

$e^{-x}\cos x + \int e^{-x}\sin x = -e^{-x}\sin x$

چون داخل یک loop از سینوس می‌افتیم پس $u = e^{-x}$ را در نظر می‌گیریم.

$u = e^{-x}$

$\int e^{x}\sin x\,dx = \int u\,dv = -e^{x}\cos x - \int -\cos x\, e^{x}dx = -e^{x}\cos x$

$+ \int e^{x}\cos x\,dx$

$e^{x} = u \rightarrow e^{x} = du$

$\sin x = dv \rightarrow -\cos x = v$ $\qquad = \ldots + e^{x}\sin x - \int \sin x\, e^{x}dx$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$= 2\int e^{x}\sin x\,dx = \frac{-e^{x}\cos x + e^{x}\sin x}{2}$

$u = e^{x} \rightarrow e^{x}\,dx = du$

$\cos x = dv \rightarrow \sin x = v$

Subject : Date

29 حل تمرین: $x^2 dy - xy\,dx = (x-2)e^{x}dx$

الف) $xy^2 = e^x + ax$

ب) $y = xe^x + ax^2$

2) معادله $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos x^2}{y}$ با شرط $y(\sqrt{\pi}) = 0$ در $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ دارای جوابی به صورت زیر است؟

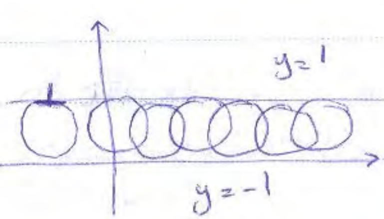
1) 0 2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 3) $\sqrt{\pi}$ 4) $\sqrt{2\pi}$

پوشش: خانواده $y = F(x, y)$ را در نظر بگیرید در این صورت $y = \varphi(x)$ یک پوشش این خانواده منحنی هاست. اگر در هر نقطه از $y = \varphi(x)$ یک منحنی از خانواده به شمس وجود داشته باشد که در آن نقطه بر پوشش مماس باشد.

تعریف: خانواده $y = F(x, c)$ دارای پوشش $y = \varphi(x)$ است اگر و تنها اگر یک تابع مانند φ به قسمی وجود داشته باشد بطوریکه

$$\begin{cases} \varphi(x) = F(x, c) \\ F_c(x, c) = 0 \end{cases}$$

مشتق نسبت به c



page

http://www.ab-rafiee.com

$(x-c)^2+y^2=1$ 30

مثال: پوشش برای خانواده $y=2cx-c^2$

$\varphi(x)=2cx-c^2=2x^2-x^2=x^2$ $(2cx+c^2)'=2x-2c=0$

$\Rightarrow c=x \rightarrow 2x^2-x^2=x^2$
پوشش

معادله کلرو: $y=xy'+f(y')$ جواب عمومی $y=xc+f(c)$

تابعی برحسب y' + مشتق y × $y=x$

مثال: $y=xy'+\sin y'+\ln y'+\frac{1}{e^{-y'}}$

$y=cx+\sin c+\ln c+\frac{1}{e^{-c}}$

$y=xy'+e^{y'}+\sin 2y'+\ln\frac{1}{y'}$ غیرخطی

$y=xy'+e^{y'}+\sin 2y'+\ln\frac{1}{y'}$

معادله ریکارتی: هر معادله دیفرانسیل به فرم $y'=f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2$

که در آن f_0 و f_1 و f_2 توابعی بر حسب x هستند.

روش حل : برای حل لازم است یک جواب خصوصی آن را مانند y_1 داشته باشیم

جواب دیگر آن از جایگذاری $y = y_1 + \frac{1}{u}$ در معادله دیفرانسیل ریکاتی حاصل می‌شود

(اگر در سؤالی جواب خصوصی داده بود معادله ریکاتی است.)

مثال: $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ ، $y(x) = -x^2$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = -x^2 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -2x + \frac{-u'}{u^2}$$

$$-2x - \frac{u'}{u^2} = x^3 + \frac{2}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right)^2$$

ساده کنیم

$$u' + \underbrace{\left[\frac{2}{x} + 2x\right]}_{p} u = \underbrace{\frac{1}{x}}_{q}$$

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int\left(\frac{2}{x} + 2x\right)dx} = e^{2\ln x + x^2} = e^{\ln x^2} \cdot e^{x^2} = x^2 e^{x^2}$$

$$u = e^{-x^2} x^{-2}\left[\frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}\,dx + c\right] = x^{-2} e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right]$$

$$= \frac{x^{-2}}{2} + c\,x^{-2} e^{-x^2} \Rightarrow y = y_1 + \frac{1}{u} = -x^2 + \frac{1}{\frac{x^{-2}}{2} + c x^{-2} e^{-x^2}}$$

جواب عمومی

تمرین : $y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} y + y^2$ ، $y_1(x) = 1/x$

الف) $y = 1/x + \frac{k}{2kx - x^2}$

ب) $y = 1/x + k \tan x$

ج) $y = 1/x + \frac{2kx}{2 - kx^2}$

د) $y = 1/x + \frac{x+k}{x-k}$

عملگر مشتق : به D عملگر مشتق گویند.

$D^0 y = y$

$D y = y'$

$D^2 y = y''$

$\vdots$

$D^n y = y^{(n)}$

مثال: $y''' + (y')^2 + 4e^x y''' = 5$

حل: $D^3(y) + (Dy)^2 + 4e^x D^3 y = 5$

مجموعه مستقل :

یک مجموعه از توابع مانند $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ را مستقل خطی گویند اگر و تنها اگر ثابت‌ها $c_1, \dots, c_n$ وجود داشته باشند بطوریکه

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

مستقل خطی نیست
وابسته خطی $\Rightarrow f_1 = \frac{-c_2 f_2 - \dots - c_n f_n}{c_1}$ ، $c \neq 0$

مثال ۴ $\{ f_1(x) = x \,,\ f_2(x) = \sin x \,,\ f_3(x) = x - 6\sin x \}$

مستقل خطی نیست وابسته خطی است. $f_3(x) = f_1(x) - 6 f_2(x)$

$f_1(x) - 6 f_2(x) - f_3(x) = 0$ $\qquad c_1 = 1 \,,\ c_2 = -6 \,,\ c_3 = -1$

تعریف رونسکین:

فرض کنید $f_1, \dots, f_n$ بر I پیوسته و تا $n-1$ مرتبه مشتق‌پذیر باشند دترمینان

زیر را رونسکین $f_1, \dots, f_n$ گویند

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

اگر مساوی صفر ← وابسته

اگر مخالف صفر ← مستقل خطی

نکته کتاب طلایی: اگر $\frac{y_2}{y_1}$ مقداری ثابت نشد ← مستقل خطی

اگر $\frac{y_2}{y_1}$ ثابت شد ← وابسته خطی

تعریف: معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,y' + a_0(x) = F(x)$$

اگر $F(x) \equiv 0$ معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه n گویند.

$$Ly = [a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \dots + a_0(x) D^0]\,y = F(x)$$

تضیه : اگر معادله دیفرانسیل همگن باشد $Ly=0$ هر ترکیب خطی y_n و ... و y_1

(جوابهای خصوصی) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $Ly=0$ خواهد بود.

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

اگر y_h جواب خصوصی معادله $Ly=0$ و y_p جواب خصوصی $Ly=F(x)$ باشد

آنگاه $y = y_p + y_h$ جواب معادله ناهمگن $Ly=F(x)$ است.

مثال $\{e^{2x}, e^{5x}, x\}$ مستقل خطی هستند؟

حل:

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{5x} & x \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} & 1 \\ 4e^{2x} & 25e^{5x} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \\ 4e^{2x} & 25e^{5x} \end{matrix}$$

$$=(e^{2x} \times 5e^{5x} \times 0) + (e^{5x} \times 1 \times 4e^{2x}) + (\quad) - [(\quad) + (\quad) + (\quad)]$$

معادله دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

که در آن a_i ها اعداد ثابت هستند.

مثال $5y^{(6)} - 7y^{(3)} + 12y'' - 7y = 0$ حل: $5x^6 - 7x^3 + 12x^2 - 7 = 0$

روش حل: معادله کمکی (به جای $y^{(n)}$ متغیر x را با توان n جایگزین می‌کنیم)

$a x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را حل می‌کنیم و ریشه‌های معادله کمکی را حل می‌کنیم.

حالات زیر رخ می‌دهد:

الف) اگر تمام ریشه‌های معادله، اعداد حقیقی $r_1, r_2, \dots, r_n$ باشد.

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad y_n = e^{r_n x}$$

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

ب) اگر معادله دارای ریشه مختلط به شکل $x = a + ib$ باشند در حالت خصوصی جواب به صورت زیر است:

$$y = e^{ax}(A \sin bx + B \cos bx)$$

مثال: $(x-1)^5 \Rightarrow \boxed{x=1}$

تکراری و مرتبه 5

ج) معادله کمکی دارای ریشه تکراری حقیقی از درجه k باشد

$$y=\left(A_0+A_1x+\dots+A_{k-1}x^{k-1}\right)e^{ax}$$

د) معادله کمکی دارای ریشه مختلط تکراری از مرتبه k باشد، هم

$$x=a\pm ib \quad , \quad y=e^{ax}\Big[\overbrace{\left(A_0+A_1x+\dots+A_{k-1}x^{k-1}\right)}^{A}\sin bx+\underbrace{\left(B_0+B_1x+\dots+B_{k-1}x^{k-1}\right)}_{B}\cos bx\Big]$$

مثال 1: $y''+4y=0$ ؟

ح: $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \quad \in \mathbb{R}$

$$y_1=e^{2x} \quad , \quad y_2=e^{-2x} \qquad y_p=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$$

جواب عمومی

مثال 2: $y''-2y'+2y=0$ ؟

ح: $x^2-2x+2=0$

$$\Delta<0 \Rightarrow \quad x_1,x_2=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i \Rightarrow a=1,\ b=1$$

$$\Delta=4-8=-4$$

$$y=e^{x}\left[A\sin x+B\cos x\right]$$

نکته: در اعداد مختلط، (به پشت منفی می‌نویسیم در اعداد مختلط) $z=a+ib \quad \bar{z}=a-ib$

$x^2+1=0$ $\quad x^2=-1$

در $\mathbb{R}$ جواب ندارد

در مختلط جواب موهومی $x=i$

Subject:

Date

مثال: ~~$(D^2-6D+9)y=0$~~ ؟ $y''-6y'+9y=0$

حل: $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$ $\qquad y=(A_0+A_1x)e^{3x}$

$x=3 \in \mathbb{R}$ از مرتبه 2

مثال: $y^{(6)}+y^{(4)}-y''-y=0$

حل: $x^6+x^4-x^2-1=0$

هرچند جمله‌ای از درجه n، حداکثر n تا ریشه دارد

$x^4(x^2+1)-(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(x^4-1)=0 \Rightarrow (x^2+1)(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)^2(x^2-1)$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm i$ ریشه تکراری از مرتبه 2 $\Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$

$x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

مستقل خطی هستند $\left\{ y_1=e^{1x} \quad y_2=e^{-x} \quad y_3=e^{0x}_{\alpha_1}\left[(A_0+A_1x)\sin x+(B_0+B_1x)\cos x\right]\right.$

$y_p=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$

مثال: $y''-4y'+5y=0$

حل: $x^2-4x+5=0$ $\qquad \Delta=16-20=-4$

$x_{1,2}=\frac{+4\pm 2i}{2}=2\pm i$

$y=e^{2x}\left[A\sin x+B\cos x\right]$ $\qquad \begin{matrix} a=2 \\ b=1 \end{matrix}$

مثال: $y^{(4)} - y = 0$

حل: $x^4 - 1 = 0$ $\cancel{(x^2-1)(x^2+1)=0}$

$\cancel{x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1}$
$\cancel{x^2=-1 \Rightarrow x=\pm i}$

$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ از مرتبه 4

$a = 1$

$$y = e^{x}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) + e^{-x}(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3)$$

مثال: $3\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - y = 0$

حل: $3x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{2 \pm 4}{6}$ $\nearrow 1$, $\searrow -\frac{1}{3}$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{3}x}$$

مثال: اگر $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 3$ باشد y برابر است با؟

$x^2 - 4x + 4 = 0$ $y = (A_0 + A_1 x)e^{2x} \Rightarrow y' = (A_1 e^{2x}) + (2e^{2x})(A_0 + A_1 x)$

$y = (A_0 + 0)\cancel{e^0} = 3 \Rightarrow A_0 = 3$

$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ تکراری از مرتبه 2

$$y' = (A_1 e^{2x}) + (2e^{2x})(A_0 + A_1 x)$$

$$1 = A_1 e^0 + (2e^0)(3+0) \Rightarrow 1 = A_1 + 6 \rightarrow A_1 = -5$$

معادله دیفرانسیل کوشی ـ اویلر:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y^{(1)} + a_0 y = 0$$

این معادله با استفاده از تغییر متغیر $x = e^u$ قابل حل است.

$$x^n y^{(n)} = D(D-1)\cdots(D-(n-1))y$$

$$x^3 y^{(3)} = D(D-1)(D-2)y$$

مثال: $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$

$x^2 = y''$ $\Rightarrow$ کوشی ـ اویلر

حل $\Rightarrow D(D-1)y + 2Dy - 6y = 0 \Rightarrow (D^2 - D)y + 2Dy - 6y = 0$

$\Rightarrow D^2y - Dy + 2Dy - 6y = 0 \Rightarrow D^2y + Dy - 6y = 0 \Rightarrow y'' + y' - 6y = 0$

که همین شد با ضرایب ثابت. دیگر ضرایبش تابعی از x نیست.

معادله دیفرانسیل غیرهمگن : $Ly = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a(x) = F(x)$

روش حل: ابتدا معادله همگن $Ly=0$ را حل می‌کنیم و y_1 و ... y_n را بدست می‌آوریم. اگر توابع

c_i چنان باشند که مشتق آنها یعنی c_i' در دستگاه زیر صدق کنند آنگاه

$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{F(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ یک جواب خصوصی است

c خود توابعی هستند برحسب x

مثال: جواب خصوصی $y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$ ؟

حل: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x=1 \,,\, x=2$

$y_1 = e^x \,,\, y_2 = e^{2x} \Rightarrow y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

y_1, y_2 ← دو جواب داریم

$$\begin{cases} (1)\quad c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0 \\ (2)\quad c_1' e^x + 2c_2' e^{2x} = \dfrac{\sin e^{-x}}{1} \end{cases}$$

(1) را در (-1) ضرب می‌کنیم و با (2) جمع می‌کنیم:

$\Rightarrow c_2' e^{2x} = \sin e^{-x} \Rightarrow c_2' = (\sin e^{-x}) e^{-2x}$

$\Rightarrow c_2 = \int e^{-2x} (\sin e^{-x})\, dx$

در امتحان اگر تا همین جا بنویسیم کافیه

برای رسیدن به جواب ترین باید از معادله کمکی ریشه حساب کنیم. $F(x)$ فقط نگاه می‌کنیم که بفهمیم از کدام فرمول استفاده کنیم

Subject:

Date: 92, 8, 11

41

* معادله دیفرانسیل غیرهمگن با ضرایب ثابت

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$$

بطوریکه $F(x) \neq 0$

$\boxed{\text{الف}}$ اگر $F(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m باشه

$y_p = x^t \times ($ چندجمله‌ای از درجه $m)$

$t =$ تعداد ریشه‌های صفر معادله کمکی معادله دیفرانسیل همگن است.

$\boxed{\text{ب}}$ اگر $F(x) = e^{ax} \times ($ چندجمله‌ای از درجه $m)$

$y_p = e^{ax} \times x^t \times ($ چندجمله‌ای از درجه $m)$

$t =$ تعداد ریشه‌های برابر با a معادله کمکی همگن

$\boxed{\text{ج}}$ اگر $F(x) = P_{n_1}(x) \sin bx + P_{n_2}(x) \cos bx$

$y_p = x^t \left(R(x)\left[\sin bx + \cos bx\right]\right)$

$R(x) = \max\{n_1, n_2\}$ چندجمله‌ای از درجه ، $t =$ تعداد ریشه‌های برابر با $\pm ib$ معادله کمکی

$P_{n_1} =$ چندجمله‌ای از درجه n_1

$P_{n_2} =$ 〃 〃 از درجه n_2

$\boxed{\text{د}}$ اگر $F(x) = e^{ax}\left[P_{n_1} \sin bx + P_{n_2} \cos bx\right]$ و

$$y_p = e^{ax} x^t \left[R(x) \sin bx + S(x) \cos bx\right]$$

page

کمکی معادله

$R(x)$ و $S(x)$ صنیر جمله از درجه $\max\{n_1, n_2\}$ و $t=$ تعداد ریشه‌های برابر با $a \pm ib$

مثال: $y'' - 2y' = x^2 + x + 1$

چون این معادله چندجمله‌ای است پس حالت اول است

حل: $y_p = x^t(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$

معادله کمکی $x^2 - 2x = 0$ $\quad x(x-2) = 0 \to x = 0,\ x = 2 \Rightarrow t = 1$

t تعداد ریشه‌های صفر است.

جواب: $y_p = x^1(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$

مثال: $y''' - 3y'' = \underbrace{x^3 - 2}_{F(x)}$

حل: $y_p = x^t(\underbrace{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3}_{P})$

$\Rightarrow x^4 - 3x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x-3) = 0 \quad x = 0$ سه تکراری $\quad t = 3$

$y_p = x^3(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3)$

تمرین: $y''' - 2y'' = x^3 - 1$

مثال: $y^{(4)} + 2y'' + y'' = \overbrace{(x^2+3)e^{-x}}^{P_1} + \overbrace{4x}^{P_2}$

حل: $(x^2+3)e^{-x} \to a = -1$

$y_{P_1} = e^{ax} x^t (A_0 + A_1 x + A_2 x^2) \Rightarrow y_p = e^{-x} x^t (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$

$\to x^4 + 2x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \quad x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x = -1$ مرتبه ۲

$t = 2$

$y_{P_2} = x^2(B_0 + B_1 x) \quad x^2 = 0 \to t' = 2$

$\boxed{y_{P_1} + y_{P_2}}$

چند جمله‌ای از درجه صفر

Subject :

$F(x) = 5e^{x} \Rightarrow$ حالت دوم

43

مثال: $y'' - 4y' + 4y = 5e^{x}$?

چند جمله‌ای از درجه صفر

حل: $y_p = x^{t} e^{ax} (A_0)$

$5e^{x} \Rightarrow a = 1$ معادله مشخصه $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \quad x = 2$

ریشه تکراری از مرتبه 2 یعنی مضاعف

$y_p = e^{x}(A_0)$ تعداد ریشه‌های برابر a که a=1 برابر صفر است. $\boxed{t = 0}$

اگر a=2 بود $\Rightarrow y_p = e^{x}(A_0)x^2$ و $t = 2$

مثال: $y'' + 4y = x^2 \sin 2x$

حل: حالت سوم $\Rightarrow y_p = x^{t}$ (چند جمله‌ای از درجه 2)

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

ریشه مختلط و نه حقیقی چون توان 2، x2 شده و منفی عدد مثبت

$b = 2 \Rightarrow \pm 2i$ $\boxed{\pm ib \text{ تعداد ریشه‌های } t}$

$x = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \pm 2i \Rightarrow t = 1$

مثال: $y'' - 4y' + 5y = (x+2)e^{2x} \sin x$

حل: $y_p = e^{ax} x^{t} [R(x) \sin bx + S(x) \cos bx]$ $P_{n_2} =$ صفر

در sin ضرب شده و cos را از بین برده است.

حل: $y_p = e^{ax} x^{t} [\quad]$

$b = 1 \quad , a = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow x = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2i}{2} \\ x_2 = \dfrac{4-2i}{2} \end{cases}$ $= 2 \pm i$

$\Rightarrow \boxed{t = 1}$

page

$x+2$

44

$$y_p = e^{2x}\, x\left[(A_0 + A_1 x)\sin x + (B_0 + B_1 x)\cos x\right]$$

سری تیلور $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$

فصل چهارم

تعریف سری توانی: یک سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$

که در آن x_0 و a_n ها همگی ثابت هستند و x متغیر سری می‌باشد را سری توانی گویند.

قضیه: اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ باشد آنگاه:

$a_0 = f(x_0)$

$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$

$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$

$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n$

* سری تیلور $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$ $x=0 \Rightarrow$ بسط مک لورن

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^{n-1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$\sinh x$ $+ \quad + \quad + \quad +$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$\cosh x$ $+ \quad + \quad + \quad +$

$*$ $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

$*$ $$(1+x)^n = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n}{m} x^m \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

تعریف: تابع F را تحلیلی گویند هرگاه مشتق آن از هر مرتبه ای موجود باشد.

تعریف نقطه منفرد: در معادله دیفرانسیل $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = F(x)$

نقطه x_0 را یک نقطه معمولی گویند هرگاه توابع $\frac{a_0}{a_n}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$ در x_0 تحلیلی باشند.

46

در غیر این صورت نقطه منفرد است.

مثال ؟ $y''+\frac{2x+1}{x^2-1}y'+5xy=\cos x$ نقاط منفرد و معمولی

معمولی $R-\{\pm1\}$ نقاط منفرد $\{\pm1\}$ ریشه‌های مخرج نقطه‌های منفرد است

* حل معادله دیفرانسیل به کمک سری توانی:

فرض کنیم تیلور $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ یا $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ جواب معادله است

سپس تمام توابع موجود را به فرم سری توانی نمایش می‌دهیم سپس y و مشتقات آن را

در معادله قرار می‌دهیم و با مساوی قرار دادن ضریب‌های x های طرفین تساوی، ضرایب

را بدست می‌آوریم.

مثال ؟ $y'-3xy=x \Rightarrow y=?$ (یعنی c_n ها را بدست آوریم)

$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

y از صفر پس y' از 1 شروع می‌شود

$3x \leftarrow$ x را داخل سری بردیم پس شد n+1

$y'=\sum_{n=1} n c_n x^{n-1}$

$y'-3xy=x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}-3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}=x$

$y = \sum c_n x^n \qquad y' = \sum n c_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum n(n-1) c_n x^{n-2}$

Subject: Date

47

$(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots)$ 47 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$

$-3(c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \cdots) = x$ $\sum\limits_{n=1}$

$\sum\limits_{n=2}$

$c_1 + (2c_2 - 3c_0)x + (3c_3 - 3c_1)x^2 + \cdots = x$ $\sum\limits_{n=k}$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 - 3c_0 = 1 \\ 3c_3 - 3c_1 = 0 \end{cases}$$

جلسه 92/8/18

تمرین (تشریحی)

مثال: $y'' + xy' + (x^2+2)y = 0 \quad , \quad y(0) = 1$

به کمک سری:

$y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(دوبار مشتق بگیریم) $\Rightarrow y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\Rightarrow y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

تا ۴ جمله اول را می‌نویسیم

$$\underbrace{(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots)}_{A} + \underbrace{(a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots)}_{B}$$

$$+ (x^2+2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 0$$

تا توان x^3 از هر کدام می‌نویسیم

page

$$A+B+(a_0x^3+a_1x^3+a_2x^4+\cdots)+2a_0+2a_1x+2a_2x^2+\cdots=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2a_2+2a_0)}_{=0}+\underbrace{(6a_3+a_1+2a_1)}_{=0}x+\underbrace{(12a_4+2a_2+a_0+2a_2)}_{=0}x^2$$

$$+\underbrace{(20a_5+3a_3+a_1+2a_3)}_{=0}x^3+\cdots=0$$

$$\begin{cases} 2a_2+2a_0=0 & \Rightarrow a_0=-a_2 \\ 6a_3+3a_1=0 & \Rightarrow a_1=-2a_3 \\ 12a_4+2a_2+a_0+2a_2=0 & \Rightarrow 12a_4+4a_2-a_2=0 \\ 20a_5+3a_3+a_1+2a_3=0 & \Rightarrow 12a_4+3a_2=0 \end{cases}$$

$a_0=1 \quad a_2=-1 \quad a_4=\frac{1}{4}$

تا 3 جمله بنویسیم کافیست

نکات:

$$c\sum a_nx^n=\sum ca_nx^n$$

$$\sum_{n=k} a_n \pm \sum_{n=k} b_n=\sum a_n\pm b_n$$

$$\left(\sum a_nx^n\right)'=\sum\left(a_nx^n\right)'$$

Subject : Date

$$\int \Big(\underbrace{\sum a_n x^n}_{\text{همگرا}} \Big) dx = \sum \Big(\int a_n x^n dx \Big)$$ 49

واگرا $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1+1-1$

همگراست $\sum a_n \Leftrightarrow a_n \to 0$

قضیه: اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه

$\lim_{n\to\infty} a = l$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

تعریف: فرض کنیم در معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$ نقطه

$x = x_0$ یک نقطه منفرد باشد اگر هر دو تابع $(x-x_0)p(x)$, $(x-x_0)^2 q(x)$

در نقطه x_0 تحلیلی باشند آن گاه x_0 یک نقطه منفرد منظم است در غیر این صورت

یک نقطه منفرد نامنظم است.

مثال: نقاط عادی و منفرد منظم و منفرد نامنظم زیر را بدست آورید:

$(x-1)^2 x^2 y'' - 2(x-1)y' - 3y = 0$

page:

حل: $y'' - \dfrac{2(x-1)}{\underbrace{x^2(x-1)^2}_{p(x)}}\, y' - \dfrac{3}{\underbrace{x^2(x-1)^2}_{q(x)}}\, y = 0$ 50

تحلیلی: در آن نقاط مشتق پذیر باشد یا اینکه مخرج صفر نباشد.

منفرد $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$(x-x_0)\,p(x) = x \times \dfrac{2}{x^2(x-1)} = \dfrac{2}{x(x-1)}$ → در $x=0$ تحلیلی نیست

لذا نقطه منفرد نامنظم است.

$x=1 \to (x-1)\,p(x) = (x-1)\dfrac{-2}{x^2(x-1)} = \dfrac{-2}{x^2}$ ✓

$(x-1)^2\, q(x) = (x-1)^2 \dfrac{-3}{x^2(x-1)^2} = \dfrac{-3}{x^2}$ ✓

در $x=1$ تحلیلی $\Rightarrow$ $x_0 = 1$ منفرد منظم

نقاط منفرد منظم یا نامنظم $\underline{(x-2)x^2}\,y'' - y'\sin x + y = 0$

$y'' - \dfrac{\sin x}{x^2(x-2)}\, y' + \dfrac{1}{x^2(x-2)}\, y = 0$

$x=0$, $x=2$ نقاط منفرد

$$(x-0)\,p(x) = x \times \frac{\sin x}{x^2(x-2)} = \frac{\sin x}{x(x-2)}$$ X درصفر تحلیلی نیست

$$(x-0)^2 q(x) = x^2 \times \frac{1}{x^2(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$ ✓ → x=0 منفرد نامنظم

$$(x-2)\,p(x) = (x-2)\,\frac{\sin x}{x^2(x-2)} = \frac{\sin}{x^2}$$

$$(x-2)^2 q(x) = (x-2)^2 \times \frac{1}{x^2(x-2)} = \frac{x-2}{x^2}$$ → منفرد منظم در x=2

اگر $x=x_0$ یک نقطه منفرد منظم باشد $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ معادله دارای

حداقل یک جواب به فرم زیر است: $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$

که در آن r ریشه معادله شاخص (فربنیوس) زیر است:

$r(r-1)+Ar+\beta=0 \Rightarrow$ این معادله دو ریشه دارد

$A = t\,p(x)\Big|_{t=0}$, $B = t^2 q(x)\Big|_{t=0}$

که برابر

با توجه به معادله شاخص و حل آن حالت های زیر رخ می دهد:

الف) $r_1-r_2 \notin Z$ ب) $r_1=r_2$ ج) $r_1-r_2 \in Z$

برای الف) $r_1 - r_2 \notin Z$

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \ , \quad y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$$

$$\Rightarrow Y = b_1 y_1 + b_2 y_2$$

b_1 , b_2 اعداد ثابت دلخواه

برای ب)

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \ , \quad y_2 = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$$

برای ج)

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \ , \quad y_2 = k\,y_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$$

k , C_m , D_m ضرایب ثابت دلخواه

مثال ۱) $x^2 y'' + 3xy' + (1-2x)y = 0$

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{(1-2x)}{x^2}y = 0$$

منفرد $x=0$

اول معادله

بعد منفرد

بعد A و B

بعد معادله شاخص

بعد ریشه معادله شاخص

بعد نوع معادله الف) و ب) ج

$$r(r-1) + Ar + B = 0$$

$$A = xP(x)\Big|_{x=0} = x \times \frac{3}{x} = 3$$

$$B = x^2 q(x)\Big|_{x=0} = x^2 \times \frac{1-2x}{x^2} = 1-2x\Big|_{x=0} = 1$$

A,B را وقتی می‌توانیم حساب کنیم که حتی در آن نقطه منظم بوده است

معادله شاخص $\Rightarrow r(r-1)+3r+1=0 \Rightarrow r^2-r+3r+1=0$

$r^2+2r+1=0 \Rightarrow (r+1)^2=0 \Rightarrow r=-1$ ریشه مضاعف , $r_1=r_2=-1$

$y_1=x^{-1}\sum c_m x^m \qquad y_2=y_1\ln x+x^{-1}\sum D_m x^m$

مثال : $2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$

$$y''+\frac{1}{2x}y'-\frac{(x+1)}{2x^2}y=0$$

منفرد منظم $x=0 \qquad A=xp(x)=x\times\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$

$$B=x^2q(x)=x^2\,\frac{-(x+1)}{2x^2}=\frac{-x-1}{2}\Big|_{x=0}=\frac{-1}{2}$$

$$r(r-1)+Ar+B=0 \Rightarrow r^2-r+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$$

جمع ضرایب صفر
پس یکی ۱ دیگری $\frac{c}{a}$

$\Rightarrow r_1=\frac{1}{2},\ r_2=1 \Rightarrow r_1-r_2\notin \mathbb{Z} \Rightarrow y_1=x^1\sum c_m x^m$

$$y_2=x^{1/2}\sum D_m x^m$$

Subject: Date

تعریف تابع بتا: $\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ به ازای $m,n>0$ همگراست.

نکته: $\beta(m,n)=\beta(n,m)$

تعریف تابع گاما: $\Gamma(n)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$ برای $n>0$ همگراست.

حقایق

$\Gamma(n)=(n-1)!$ $\qquad$ $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)$

$\Gamma(1)=1$ $\qquad$ $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \qquad \Gamma(-\tfrac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$$

مثال: $\int_0^{\infty} e^{-x}x^6\,dx=?$

حل: $\int_0^{\infty} e^{-x}x^6\,dx=\Gamma(7)=6!$

مثال: $\beta(4,6)=\dfrac{\Gamma(4)\,\Gamma(6)}{\Gamma(10)}=\dfrac{3!\times 5!}{9!}$

Subject : Date

تاریخ ۹۲/۸/۲۵

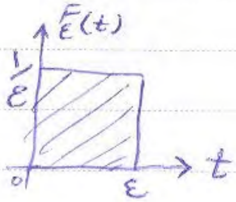
تعریف دلتای دیراک: تابع $F_\varepsilon(t)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

وقتی $\varepsilon > 0$ باشد شکل این تابع بصورت زیر است

$\varepsilon \to 0$

$F_\varepsilon(t) \to \infty$ ارتفاع مستطیل ∞



$\int_0^\infty F_\varepsilon(t)\,dt = 1$ ثابت است

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(t) = \overset{\text{دلتا}}{\overrightarrow{\delta}}(t)$$

خواص دلتا:

۱) $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$

۲) $\int_0^\infty \delta(t)G(t)\,dt = G(0)$

G تابعی پیوسته در $0, a$ است

۳) $\int_0^\infty \delta(t-a)G(t)\,dt = G(a)$

مثال) $\int_0^\infty \delta(t-\frac{\pi}{2})\sin t\,dt = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Subject : ....   Date

توابع بسل : فرم معادله دیفرانسیل بسل بصورت زیر است :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

جواب معادله بالا است $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

جواب عمومی $Y = A\,J_n(x) + B\,J_{-n}(x)$ 	A,B اعداد ثابت

* اگر $n=0$ باشد آنگاه $Y_n = J_n(x) \int \frac{dx}{x\,[J_n(x)]^2}$, $Y_{عمومی} = A\,J_n(x) + B\,Y_n$

فرمول های مهم توابع بسل :

1) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

2) $\left[x^{-n} J_n(x)\right]' = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

3) $J_n(x) = \frac{x}{2n}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)$

4) $J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)$

5) $J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x)$

6) $J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} \cdot J_n(x) - J_{n-1}(x)$

سوال: ثابت کنید:

$$J_n''(x) = \frac{1}{4}\left(J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)\right)$$

حل: $J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)$

$$J_n''(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}'(x) - J_{n+1}'\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(J_{n-2} - J_n) - \frac{1}{2}(J_n - J_{n+2})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}\right)$$

$J_{n-1}' = \frac{1}{2}(J_{n-2} - J_n)$, $J_{n+1}' = \frac{1}{2}(J_n - J_{n+2})$

نکته: اگر در فرمول کلی بسل به جای x^2، k^2x^2 داشتیم با تغییر متغیر $kx = t$ به جواب

$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ — می‌رسیم: $J_n(kx)$

$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - n^2)y = 0$ — $kx = t$

جواب $J_n(kx)$

تعریف : لاپلاس : فرض کنید $f(t)$ تابعی باشد که به ازای مقادیر مثبت t تعریف شده باشد تبدیل لاپلاس این تابع را با $L(f(t))$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

برحسب S جواب بدست می‌آید

که S یک عدد حقیقی یا مختلط است . (منظور از لاپلاس ، $\int$ انتگرال است)

$F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ گویند و $f(t)$ را یک تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ نامند.

$$f(t) = L^{-1}(F(s))$$

$f \to L$ $\quad f^{-1} \Rightarrow f$ inverse
$L \to f$ $\quad$ معکوس

نحوه کار لاپلاس : منحنی منحنی مهم حفظ شود

نکته* لاپلاس و لاپلاس معکوس ویژگی خطی دارند.

ویژگی خطی : $L(af(x) + b\,g(x)) = a\,L(f(x)) + b\,L(g(x))$

$$L^{-1}(af(x) + b\,G(s)) = a\,L^{-1}(F(s)) + b\,L^{-1}(G(s))$$

مثال برای لاپلاس $f(t) = \sin t$ $\quad L(f(t)) = L(\sin(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} \underbrace{\sin t}_{f(t)}\, dt$

Subject : Date

$L(1) = \frac{1}{S}$ "خیلی مهم"

$L(5) = 5\,L(1) = \frac{5}{S} \Rightarrow L(n) = \frac{n}{S}$

$f(t)$	$L(f(t)) = F(s)$		
1	$\frac{1}{S}$	$J_n(at)$	$\frac{\sqrt{S^2+a^2} - S}{a^n \sqrt{S^2+a^2}}$
n	$\frac{n}{S}$		
e^{at}	$\frac{1}{S-a}$		
$\sin at$	$\frac{a}{S^2+a^2}$		
$\cos at$	$\frac{S}{S^2+a^2}$		
$\sinh at$	$\frac{a}{S^2-a^2}$		
$\cosh at$	$\frac{S}{S^2-a^2}$		
عدد صحیح t^n	$\frac{n!}{S^{n+1}}$		
غیر صحیح t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{S^{n+1}}$		
$J_n(at)$	$\frac{\sqrt{S^2+a^2} - S}{a^n \sqrt{S^2+a^2}}$		

page

Subject: .... Date

مثال: $L(5+2t^3-4t^2+t^4)$

حل: $= L(5)+2L(t^3)-4L(t^2)+L(t^4)$

$$=\frac{5}{s}+2\times\frac{3!}{s^4}-4\,\frac{2!}{s^3}+\frac{4!}{s^5}$$

مثال: $L(\sin 3t)=\frac{3}{s^2+9}$

حل: $L\left(\frac{1}{\sqrt t}\right)=L\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)=$

$$=\frac{\Gamma\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt\pi}{\sqrt s}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

در 5 ضرب و تقسیم کردیم و 9 را بیرون آوردیم

مثال: $L^{-1}\left(\frac{9}{s^2+25}\right)$, $L^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+4}\right)$, $L^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right)$

$\frac{9}{5}L^{-1}\left(\frac{5}{s^2+25}\right)$ $\downarrow$ $\frac{9}{5}\sin 5t$

$\downarrow$ $2\cos 2t$

$\downarrow$ $f(t)=e^{-5t}$

$\left(\sin 5t=\frac{5}{s^2+25}\right)$

$$\frac{9\times 5}{5\times s^2+25}$$

$L\left(\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$L^{-1}\left(\frac{2s^2+1}{s^{\frac{5}{2}}}\right)$

$\downarrow$

$L^{-1}\left(\frac{2s^2}{s^{\frac{5}{2}}}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}\right)$

$=2\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right)+\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}$

$=L^{-1}\left[2\left(\frac{1}{\sqrt s}\right)\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(\sqrt s)^5}\right]$

$=2\left[\frac{1}{\sqrt\pi}t^{-\frac{1}{2}}\right]+\frac{1}{\pi\left(\frac{3}{2}\right)}t^{\frac{3}{2}}$

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\times L^{-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}t^{\frac{3}{2}}}$$

Subject :

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{2}{s^{1/2}}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{\underbrace{s^{5/2}}_{2}}\right) \qquad t^{a} \Rightarrow \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

1 $a+1=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$, $2L^{-1}\left(\frac{1}{s^{1/2}}\right)=\frac{2}{\Gamma(1/2)}\cdot L^{-1}\left(\frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}\right)$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2}$$

2 $\frac{1}{\Gamma(5/2)}L^{-1}\left(\underbrace{\frac{\Gamma(5/2)}{s^{(5/2)}}}_{t^{3/2}}\right)=\frac{1}{\Gamma(5/2)}t^{3/2}$

$L\left(\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ $\qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$$\sin 3t\cos\frac{\pi}{4}+\cos 3t\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=L\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3t+\frac{\sqrt{2}}{3}\cos 3t\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[L(\sin 3t+L(\cos 3t)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{3}{s^2+9}+\frac{s}{s^2+9}\right]$$

beheshti.neda@aut.ac.ir

Subject: تاریخ 92,9,2

تعریف: تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب T : $f(x+T)=f(x)$

$\sin(x+2\pi)=\sin x$ مثال

$$* \quad L(\overset{\text{متناوب}}{f(t)})=\frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

$$* \quad L(f^{(n)}(t))=S^n F(s)-S^{n-1}f(0)-S^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

مثال: $L(y'')=?$

$$L(y'')=S^2F(s)-S^1 f(0)-f'(0)$$

$$L(y''')=S^3F(s)-S^2f(0)-S^1f'(0)-f''(0)$$

انواع معادلات دیفرانسیل

الف) معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots a_n y'=f(x)$

ب) معادلات دیفرانسیل با ضرایب غیر ثابت t^m

$$t^m y^{(n)}+t^{m2}y^{(n-1)}+\cdots=f(x)$$

page

Subject :

Date

روش حل حالت الف : $y'' + \alpha y' + \beta y = g(t)$

فرض می‌کنیم معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت فوق داده شده باشد، که در آن β , α

ضرایب ثابت هستند تحت شرایط اولیه $y(0) = A$ و $y'(0) = B$ (B , A عددی ثابتند)

باشد، از طرفین معادله دیفرانسیل فوق لاپلاس می‌گیریم و با بکار بردن شرایط اولیه

معادله جبری $L\{f(t)\} = Y(s)$ بدست می‌آید سپس $F(s) = Y(s)$ را با استفاده

از تبدیل معکوس لاپلاس محاسبه می‌کنیم.

مثال : $y'' + 3y' + 2y = 1$; $y(0) = 2$
$y'(0) = 1$

حل: $L\{y'' + 3y' + 2y\} = L(1) = \frac{1}{s}$ $\Rightarrow L(y'') + 3L(y') + 2L(y) = 1/s$ (*)

$$\begin{cases} L(y'') = s^2 F(s) - sF(0) - f'(0) \\ L(y') = sF(s) - f(0) \\ L(y) = F(s) \end{cases} \Rightarrow$$ در (*) جایگذاری می‌کنیم

$$(s^2F(s)-2s-1)+3(sF(s)-2)+2F(s)=1/s$$

$$s^2F(s)-2s-1+3sF(s)-6+2F(s)=1/s$$

$$F(s)\left[s^2+3s+2\right]=1/s+2s+7=\frac{2s^2+7s+1}{s}$$

$$L(f(t))=F(s)=\frac{2s^2+7s+1}{s(s^2+3s+2)}=\frac{2s^2+7s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+2}=\frac{A(s+1)(s+2)+B(s)(s+2)+2(s)(s+1)}{\text{مخرج}}$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{2s}+\frac{2}{s+1}+\frac{1/2}{s+2}$$

$$f(t)=L^{-1}(f(s))=L^{-1}\left(\frac{1}{2s}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{s+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1/2}{s+2}\right)=1/2+2e^{t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

مثال: $y''+n^2y=a\cos x \quad y(0)=y'(0)=0$

حل: $L(y''+n^2y)=L(a\cos x)$

$$L(y'')=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

Subject:

Date

$$L(y'') + n^2 L(y) = \frac{a s}{s^2 + 1}$$

$$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) + n^2 \big(F(s)\big) = \frac{a s}{s^2+1}$$

$$s^2 F(s) - 0 + n^2 \big(F(s)\big) = \frac{a s}{s^2+1} \Rightarrow F(s)\,(s^2 + n^2) = \frac{a s}{s^2+1}$$

$$F(s) = \frac{a s}{(s^2+1)(s^2+n^2)}$$

ب) معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت :

$$L\big(t^m f^{(n)}(t)\big) = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \left\{ L\big(f^{(n)}(t)\big) \right\}$$

$$= (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} \left(s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \right)$$

مثال :

$$t' y'' + y' + 4 y t = 0$$

$$y'(0) = 0 \quad , \quad y(0) = 3$$

$$L(t' y'' + y' + 4 y t) = L(0) = 0$$

$$L(t' y'') + L(y') + 4 L(t y) = L(0) = 0$$

page

$$(-1)'\frac{d}{ds}\left(L(y'')\right)+sF(s)-f(0)+4(-1)'\frac{d}{ds}\left(F(s)\right)=0$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\right)+sF(s)-3-4\frac{d}{ds}\left[F(s)\right]=0$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2F(s)-3s-0\right)+sF(s)-3-4\frac{d}{ds}\left[F(s)\right]=0$$

$$-\left(2sF(s)+\left(\frac{d}{ds}F(s)\right)s^2-3\right)+sF(s)-3-4\frac{dF(s)}{ds}=0$$

$$\frac{dF(s)}{ds}(-s^2-4)=sF(s) \xrightarrow{\text{شبیه}} \frac{dy}{dx}(-x^2-4)=xy$$

جدا شدنی

$$\frac{dF(s)}{F(s)}=\frac{-s}{s^2+4}\,ds \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \int\frac{dF(s)}{F(s)}=\int\frac{-s}{s^2+4}\,ds$$

$$\ln\left(F(s)\right)=-\frac{1}{2}\ln(s^2+4) \Rightarrow \ln\left(F(s)\right)=\ln\left(\sqrt{s^2+4}\right)^{-1}$$

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+4}}=J_0(2t)$$

Subject: Date

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به کمک لاپلاس:

$$\begin{cases} X'' - nY' = 0 \\ Y'' + nX' = n^2 a \end{cases} \qquad X(0) = Y(0) = X'(0) = Y'(0) = 0$$

$$\begin{cases} L(X'') - nL(Y') = 0 \\ L(Y'') + nL(X') = \dfrac{n^2 a}{S} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} L(X) = x , \\ L(Y) = y \end{matrix}}$$ قرارداد می‌کنیم:

$$\begin{cases} S^2(L(X) - SX(0) - X'(0)) - n(SL(Y) - Y(0)) = 0 \\ S^2L(Y) - SY(0) - Y'(0) + n(SL(X) - X(0)) = \dfrac{n^2 a}{S} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S^2 x - nSy = 0 \\ S^2 y + nSx = \dfrac{n^2 a}{S} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{nSy}{S^2} \quad (*)$$ در پایینی جاگذاری می‌کنیم (2)

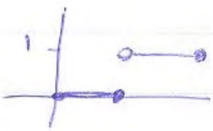
$$\Rightarrow S^2 y + n\cancel{S}\left(\frac{nSy}{S^{\cancel{2}}}\right) = \frac{n^2 a}{S} \Rightarrow S^2 y + n^2 y = \frac{n^2 a}{S} \Rightarrow y = \frac{n^2 a}{S} \times \frac{1}{S^2 + n^2} \quad (1)$$

$$(1),(2) \Rightarrow x = \frac{n}{S} \times \frac{n^2 a}{S} \times \frac{1}{S^2+n^2} = \frac{n^3 a}{S^2(S^2+n^2)} \quad (*)$$

page

و سپس برای بدست آوردن $x = Lx$ از ⊛ لاپلاس معکوس می‌گیریم و برای این

کار از تجزیه کسرها استفاده می‌کنیم.



$$u_a(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ 1 & x \ge a \end{cases}$$